Лекции по алгебраической геометрии: Геометрия на кривой, римановы поверхности, абелевы интегралы.

Франческо Севери, 1908

2 сентября 2011 г.

Содержание

Предисловие переводчика

Лекции, читанные Фр. Севери в университете Падуи, были впервые изданы литографическим способом в 1908 году, в 1921 году уже типографским способом был издан их немецкий перевод, выполненный Э. Леффлером. За основу русского перевода выбран немецкий перевод как более удобный для распознавания, однако ряд дополнений, внесенных переводчиком в основной текст, был удален. Раздел 5.1 и № 25 в моем переводе были перекомпанованы.

Источники:

- Fr. Severi. Lezioni di geometria algebrica, Padova: Angelo Graghi, 1908.
- Fr. Severi. Vorlesungen über algebraische Geometrie: Geometrie auf einer Kurve, Riemannsche Flächen, Abelsche Integrale. Berechtigte deutsche Übersetzung, von dr. Eugen Löffler, Mit einem Einführungswort von A. Brill und 20 Figuren. Berlin-Leipzig, B. G. Teubner, 1921.

1 Линейные системы плоских кривых

1.1 Общие замечания о линейных системах плоских кривых

page:5

n:1 **1. Определения и простейшие свойства. Объединение и пересечение двух систем.** Рассмотрим равенство вида

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + \dots + \lambda_r f_r(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (1)$$ eq:1.1:

где f_i – однородные полиномы (формы) относительно переменных x_1, x_2, x_3 одного и того же порядка n, а λ_i – параметры, которые не могут обратиться в нуль одновременно. На плоскости, для которой x_1, x_2, x_3 – однородные координаты точек, это уравнение при заданных значениях λ_i описывает алгебраическую кривую порядка n. Придавая λ_i всевозможные комплексные значения, но такие, чтобы одновременно эти величины не обращались в нуль, получим семейство алгебраических кривых, которое называют *линейной системой*, поскольку параметры, которые определяют положение кривой внутри системы, входят в уравнение (1) линейно.

Пусть f – та кривая системы, которая соответствует значениям $(\lambda_0', \lambda_1', \dots, \lambda_r')$ параметров λ_i; очевидно, что значения $(\rho\lambda_0', \rho\lambda_1', \dots, \rho\lambda_r')$ $(\rho \neq 0)$ соответствуют той же кривой f. Поэтому при определении кривой f существенны только значения r отношений $(r+1)$ параметров λ_i. Но можно ли сказать наоборот, что по заданной кривой системы можно однозначно определить значения этих отношений?

Предположим, что кривая линейной системы соответствует двум различным наборам значений параметров λ_i, именно $(\lambda_0', \lambda_1', \dots, \lambda_r')$ и $(\lambda_0'', \lambda_1'', \dots, \lambda_r'')$. Тогда оба уравнения

$$\lambda_0' f_0 + \lambda_1' f_1 + \dots, \lambda_r' f_r = 0, \quad \lambda_0'' f_0 + \lambda_1'' f_1 + \dots + \lambda_r'' f_r = 0$$

имеют одни и те же решения, и поэтому их левые части могут различаться только на постоянный множитель ρ; следовательно, тождественно относительно переменных x_i верно

page:6

$$\lambda_0' f_0 + \lambda_1' f_1 + \dots, \lambda_r' f_r \equiv \rho\lambda_0'' f_0 + \lambda_1'' f_1 + \dots + \lambda_r'' f_r$$

или

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r \equiv 0, \tag{2}$$

eq:1.1:

где $\alpha_1 = \lambda'_i - \rho\lambda''_i$. И тут могут представиться два случая: или все α_i равны нулю, и тогда $\lambda'_i = \rho\lambda''_i$, или среди α_i имеются отличные от нуля. Если, напр., $\alpha_0 \neq 0$, то

$$f_0 \equiv -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} f_1 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_0} f_r,$$

то есть одна из форм может быть выражена через остальные. В этом случае заданные формы называют *линейно зависимыми*, как и кривые $f_0 = 0, \ldots, f_r = 0$.

Кривые называют *линейно независимыми*, если линейная комбинация левых частей их уравнений равна нулю только тогда, когда все коэффициенты этой комбинации обращаются в нуль. Отсюда получаем след.: *Если заданные кривые $f_0 = 0, \ldots, f_r = 0$ линейно независимы, то между кривыми системы* (1) *и r отношениями параметров λ_i имеется взаимно однозначное соответствие.*

В этом случае, стало быть, каждой группе r чисел отвечает одна вполне определенная кривая системы, и наоборот, каждой кривой отвечает вполне определенный набор r чисел. Линейна система при этом называется r-кратно бесконечной (то есть ∞^r-системой) или, как еще говорят, системой размерности r. Отдельную кривую всегда можно рассматривать как *линейную систему нулевой размерности.*

Интерпретируя $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_r$ как однородные координаты точки линейного пространства S_r размерности r, можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие между кривыми линейной системы и точками пространства S_r.

Обратимся теперь к общему случаю, когда серди полиномов f_i имеются соотношения вида (2), не все коэффициенты α_i в которых равны нулю. Выберем из группы $f_0, f_l, \ldots, f_r$ одну произвольную форму, скажем, f_0. Тогда могут представиться два случая: или все остальные формы f_i зависят от f_0, то есть они отличаются от f_0 только на постоянный множитель,

page:7

или возможно среди форм $f_1, f_2, \dots f_r$ найти одну, скажем, f_1, не зависящую линейно от f_0. Но тогда можно опять рассмотреть два случая: или оставшиеся $r-1$ формы линейно зависят от f_0 и f_1, или среди $f_2, \dots, f_r$ имеется такая форма, скажем, f_2, не зависящая линейно от f_0 и f_1; и т.д. Продолжая двигаться в том же направлении, в конце концов выделим в группе $f_0, f_1, \dots, f_r$ некоторое число $h+1$ форм, скажем, $f_0, f_1, \dots, f_h$, которые сами линейно независимы, а остальные $r-h$ формы выражаются как линейные комбинации этих форм. Таим образом, мы получим следующие тождества:

$$\begin{aligned} f_{h+1} &\equiv \varepsilon'_0 f_0 + \varepsilon'_1 f_1 + \dots + \varepsilon'_h f_h, \\ f_{h+2} &\equiv \varepsilon''_0 f_0 + \varepsilon''_1 f_1 + \dots + \varepsilon''_h f_h, \\ &\dots \\ f_r &\equiv \varepsilon_0^{(r-h)} f_0 + \varepsilon_1^{(r-h)} f_1 + \dots + \varepsilon_h^{(r-h)} f_h, \end{aligned} \tag{3}$$

eq:1.1:

где ε – некоторые постоянные.

Если подставить эти выражения для $f_{h+1}, \dots f_r$ в уравнение (1), то получим уравнение следующего вида

$$\mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_h f_h = 0, \tag{4}$$

eq:1.1:

т.е. каждая кривая линейной системы (1) принадлежит линейной системе (4). Обратное очевидно: каждая кривая системы (4) принадлежит системе (1), поскольку уравнение (1) переходит в (4), если положить $\lambda_{h+1} = 0, \lambda_{h+2} = 0, \dots, \lambda_r = 0$. Таким образом, уравнения (1) и (4) описывают одно и то же семейство кривых, т.е. обе линейные системы (1) и (4) совпадают.

В таком случае заданная линейная система (1) является ∞^h-системой, а ее элементы (кривые) состоят во взаимно однозначном соответствии с точками пространства S_h, если рассматривать $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_h$ как координаты точек этого пространства. Итого:

Кривые линейной системы в любом случае состоят во взаимно-однозначном и непрерывном соответствии с точками линейного пространства, размерность которого равна размерности системы.

Это соответствие таково, что *линейно независимые кривые представляются линейно независимыми точками и наоборот.*

В самом деле, если кривые

$$\sum_{i=0}^{h}\mu_i' f_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{h}\mu_i'' f_i = 0, \ldots, \sum_{i=0}^{h}\mu_i^{(s)} f_i = 0 \tag{5}$$ eq:1.1:

page:8 ∞^h-системы (4) линейно независимы, то между ними нельзя установить тождества вида

$$\eta_1 \sum \mu_i' f_i + \eta_2 \sum \mu_i'' f_i + \cdots + \eta_s \sum \mu_i^{(s)} f_i \equiv 0,$$

то есть вида

$$f_0 \sum_{j=1}^{s} \mu_0^{(j)}\eta_j + f_1 \sum_{j=1}^{s} \mu_1^{(j)}\eta_j + \cdots + f_h \sum_{j=1}^{s} \mu_h^{(j)}\eta_j \equiv 0,$$

в котором бы среди η_j были отличные от нуля.

Но кривые $f_0, f_1, \ldots, f_h$ линейно независимы, поэтому, если не все η_j отличны от нуля, следующие условия несовместны:

$$\begin{aligned} \mu_0'\eta_1 + \mu_0''\eta_2 + \ldots \mu_0^{(s)}\eta_s &= 0,\\ \mu_1'\eta_1 + \mu_1''\eta_2 + \ldots \mu_1^{(s)}\eta_s &= 0,\\ &\ldots\\ \mu_h'\eta_1 + \mu_h''\eta_2 + \ldots \mu_h^{(s)}\eta_s &= 0. \end{aligned}$$

Это и означает, что точки с координатами $(\mu_0', \mu_1', \ldots, \mu_h')$, $(\mu_0'', \mu_1'', \ldots, \mu_h'')$, ..., $(\mu_0^{(s)}, \mu_1^{(s)}, \ldots, \mu_h^{(s)})$ линейно независимы. И наоборот, если эти эти точки линейно независимы, то, проделывая эти выкладки в обратном порядке, видим, что и кривые (5) независимы.

Это утверждение позволяет многие свойства лирнейных пространсв распространить и на линейные системы плоских кривых. Так, напр., утверждение о том, что пространство S_k, заданное $k+1$ независимыми точками пространства S_h $(k \le h)$, полностью содержится в пространстве S_h, ведет к след. теореме:

Линейная система, заданная некоторым числом линейно независимых кривых линейной системы Σ, целиком принадлежит системе Σ.

В частности отсюда получает, что *в линейной ∞^h-системе может содержаться не более чем $h+1$ линейно независимых кривых, и что линейная ∞^h-система вполне определяется заданием $h+1$ своих кривых, при том только условии, что эти кривые линейно независимы.*

Эти свойства могут быть доказаны и прямо.

Другая теорема может быть образована, если рассмотреть *пересечение* и *объединение* двух пространств S_k и $S_{k'}$, т.е. линейное пространство наибольшей размерности, содержащееся в обоих этих пространствах, и линейное пространство наименьшей размерности, содержащее оба эти пространства.
page:9 В итоге:

Пусть c – размерность наименьшей линейной системы (объединение), содержащей две линейные системы Σ и Σ' размерностей k и k', а i – размерность наибольшей линейной системы (пересечение), которая содержится в обеих системах, то верно равенство

$$k + k' = c + i,$$

причем следует брать $i = -1$, если пересечение пусто.[1] Напр., для двух пучков конических сечений

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0 \quad \text{и} \quad \mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 = 0,$$

в общем случае, пересечение пусто ($i = -1$), а объединение является ∞^3-системой:

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 = 0.$$

Если же 8 базисных точек обоих пучков лежат на одном и том же коническом сечении, то пересечение пучков сводится к этому коническому

[1]Прямое доказательство этой теоремы (принадлежащее К. Сегре) можно найти в статье: Bertini. La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico. Ann. di Mat. (2) 22 (1894) в сноске к стр. 8. – Автор.

сечению и поэтому является ∞^0-системой, а объединение является ∞^2-системой (функции $f_0, f_l, \varphi_0, \varphi_1$ более не являются линейно независимыми).

n:2 **2. Алгебраические условия. Линейные условия.** *Условие*, наложенное на кривую заданного порядка n, называется *алгебраическим*, если оно может быть выражено системой алгебраических уравнений на коэффициенты уравнения кривой. Говорят, что условие имеет *размерность* d, если имеется $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}-d}$ кривых порядка n, им удовлетворяющих, то есть если множество таких кривых может быть выражено при помощи непрерывного соответствия конечного индекса через значения $\frac{n(n+3)}{2}-d$ произвольных параметров. Объединение двух условий размерностей d и d' само является условием, размерность которого меньше чем сумма $d+d'$ или равна ей.

Из теорем об условиях функциональной зависимости нескольких функций можно получить след.:

Для того, чтобы заданно алгебраическое условие, выраженное уравнениями

$$\varphi_1(a_0, a_1, \dots, a_{\frac{n(n+3)}{2}}) = 0, \dots, \varphi_s(a_0, a_1, \dots, a_{\frac{n(n+3)}{2}}) = 0$$

имело размерность d, необходимо и достаточно, чтобы якобиан

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots \varphi_s)}{\partial(a_0, \dots a_{\frac{n(n+3)}{2}})}$$

для общего (general) решения уравнений $\varphi_i = 0$ имел ранг d.

Множество кривых, удовлетворяющих некоторому алгебраическому условию, называют алгебраической системой. Среди алгебраических условий особенно важны *линейные условия*, то есть условия, которые можно выразить линейными уравнениями. Кривые, удовлетворяющие линейным уравнениям, образуют *линейные системы.*

Алгебраическое условие размерности $\frac{n(n+3)}{2}$ может быть удовлетворено лишь конечным числом кривых.

Пусть Σ – алгебраическая ∞^r-система. Выберем на плоскости некоторую точку P_1, через которую проходят не все кривые системы Σ; ограничившись кривыми системы, проходящими через точку P_1, то есть подчинив их линейному условию, независящему от алгебраического условия, определяющего систему, получим новую алгебраическую систему Σ_1 размерности $r-1$. Возьмем далее точку P_2, через которую проходят не все кривые системы Σ_1. Кривые системы Σ_1, проходящие через точку P_2, составляют алгебраическую систему Σ_2 размерности $r-2$. Продолжая так далее, придем к к алгебраической ∞^0-системе Σ_r, то есть конечному числу кривых, проходящим через r точек (подчиненным r независимым условиям). Итого:

Если алгебраическая система имеет размерность r, то через r общих[2] *точек проходит лишь конечное число кривых этой системы.* Это число называется *индексом* системы.[3]

Очевидно, что число кривых алгебраической ∞^r-системы, проходящих через r подвижных точек плоскости, остается постоянным (если оно не бесконечно велико) в предположении, что каждой кривой предписана подходящая кратность. Сказанное прямо следует из постоянства числа решений системы алгебраических уравнений с переменными коэффициентами. [4]

В частности, если линейная система Σ имеет размерность r, то мы можем выбрать указанным выше способом r точек, налагающих на кривые системы Σ независимые линейные условия размерности 1. Но кривые Σ суть кривые порядка n, на которые наложено линейное условие размерности $\frac{n(n+3)}{2}-r$, поэтому добавляя к старому условию новые, между собой и с старым условием независимые, получим линейное условие размерности $\frac{n(n+3)}{2}$. Этотому условию удовлетворяет одна единственная кривая плоскости. Итого:

Через r произвольных точек плоскости проходит одна единственная кривая заданной линейной системы размерности r.

---

[2]Итальянские геометры различали *punti comuni* (общие для каких-то кривых точки) и *punti generici* (общие, т.е. выбранные произвольным образом точки); в русском переводе во избежании двусмыслицы только вторые называются общими, первые же называются совместными. – Перев.

[3]Этот термин введено Жонкьером в 1861 г., см. Введение Кремоны, n. 34. – Перев.

[4]В немецком переводе убрана последняя фраза, а в условия теоремы добавлено, что система (или, что по определению то же, соответствующее ей в пространстве $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$ многообразие) должна быть неприводимой. – Перев.

Обратимся теперь к еще одному примеру линейных условий, отличных на этот раз от требования прохождения кривых через заданную точку.

Когда некоторые из заданных точек двигаются вдоль постоянной кривой, и даже когда они сходятся в одной единственной фиксированной точке этой кривой, то условие, выражающее прохождение через эти точки, непрерывно меняется, все время оставаясь линейным. Переходя к пределу получим условие того, что кривая заданного порядка имеет с постоянной кривой касание кратности $t-1$.[5] Поэтому *условие касания той или иной кратности с заданной кривой в заданной точке является линейным.*

Впрочем, сказанное можно вывести и из следующего. Если кривая $f(x,y)=0$ должна иметь с постоянной кривой Γ в заданной точке P касание кратности $t-1$, то коэффициенты f следует подчинить известным условиям, которые можно найти, если записать условия того, что в точке P полином f обращается в нуль , производные $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{t-1}y}{dx^{t-1}}$ принимают значения, которые вычисляются по заданной кривой Γ. Все эти условия линейны относительно коэффициентов f.

Аналогично, *условие, по которому кривая должна иметь в заданной точке плоскости точку кратности s, является линейным*; в самом деле, аналитически это условие выражается требованием обращения в нуль всех производных до $(s-1)$-го порядка формы f, если в них подставить
page:13 однородные координаты заданной точки.

Наконец, заметим еще, что *наложенное на кривые линейной системы Σ требование содержать заданную кривую Γ как составную часть тоже является линейным условием.*

Для доказательства выберем на кривой Γ произвольную точку P_1 и линейную систему, образованную всеми кривыми системы Σ, проходящими через эту точку, обозначим как Σ'. Если кривые этой новой системы содержат кривую Γ как составную часть, то теорема доказана; в противном случае можно опять взять на кривой Γ произвольную точку P_2, через ко-

[5] В оригинале *contatto t-punto*, то есть пересечение в t бесконечно близких точках. – Перев.

торую проходят не все кривые системы Σ' и составить линейную систему Σ'' из кривых Σ', проходящих через P_2. Здесь опять возможны два случая: или все кривые системы Σ'' содержат кривую Γ как свою составную часть, или можно выбрать на Γ точку P_3, через которую проходят не все кривые системы Σ'' и т.д.

Каждое условие прохождения через новую точку P понижает размерность рассматриваемой линейной системы на единицу, поэтому в конец концов мы придем или к линейной системе, кривые которой содержат кривую Γ как составную часть, или к одной единственной кривой системы Σ, проходящей через r точек $P_1, P_2, \ldots, P_r$ кривой Γ, но не содержащей кривую Γ как часть. В последнем случае среди кривых системы Σ не имеется ни одной, имеющей кривую Γ своей составной частью.

n:3 **3. Базовые точки линейной системы.** Точка, общая для *всех* кривых линейной системы Σ, называется *базовой* точкой системы Σ. Если, напр., система Σ описывается уравнение (1) и кривые $f_0 = 0, f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$ имеют общую точку P, то очевидно, что эта точка принадлежит каждой кривой (1), то есть является базовой точкой системы Σ.

Если система Σ является *пучком* кривых ($r = 1$), то она должна иметь базовые точки; таковых имеется n^2, если две кривые $f_0 = 0$ и $f_1 = 0$, определяющие пучок, имеют порядок n и не имеют общих составных частей.

Сеть ($r = 2$) же *в общем случае* не имеет базовых точек, как и системы большей размерности, поскольку три и более кривых в общем случае не имеют общих точек.

Но может представиться и случай, когда линейная система имеет бесконечно много базовых точек; эти точки образуют одну или несколько неприводимых алгебраических кривых, которые принадлежат все кривым системы в качестве составных частей. Напр., линейная система

$$\lambda_0 \varphi f_0 + \lambda_1 \varphi f_1 + \cdots + \lambda_r \varphi f_r = 0$$

page:14 имеет бесконечно много базовых точек, распределенных вдоль кривой $\varphi = 0$. *Если точка P лежит одновременно на $r + 1$ линейно независи-*

мых кривых некоторой линейной ∞^r-системы, то она является базовой точкой этой системы; это очевидно, поскольку уравнение произвольной кривой системы можно представить как линейную комбинацию уравнений этих $r+1$ независимых кривых.

1.2 Теоремы Люрота и Бертини

n:4 **4.** Теорема, согласно которой через r общих точек плоскости можно провести в точности одну кривую линейной ∞^r-системы, может быть обращена следующим образом:

th:n:4 **Теорема 1.2.1.** *Если алгебраическая ∞^r-система плоских кривых порядка n обладает тем свойством, что через r произвольных точек плоскости проходит одна единственная кривая системы, то эта система линейная.*

n:5 **5. Лемма о рядах групп точек на прямой.** Доказательству этой теоремы целесообразно предпослать следующую лемму:

Если на некоторой прямой задано алгебраический ряд Σ групп, состоящих из n точек, причем общая точка прямой принадлежит одной единственной группе, то ряд Σ является линейным, то есть его группы можно описать при помощи уравнения вида

$$f(x) + \lambda g(x) = 0,$$

где f и g – заданные полиномы степени n, а λ – переменный параметр.

Называя ряд алгебраическим, мы хотим подчеркнуть, что его общая группа может быть описана в координатах x при помощи уравнения вида $\varphi(x) = 0$; здесь φ – полином степени n, коэффициенты которого связаны некоторым числом алгебраических уравнений, множество которых мы далее будем обозначать как A. Предположение леммы состоит в том, что общая точка прямой принадлежит одной единственной группе $\varphi = 0$.

Пусть задана точка x_0; чтобы определить группу, которой эта точка принадлежит, следует исключить переменные коэффициенты φ из уравнений

A и уравнений

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x_0) = 0.$$

Из алгебры известно, что это исключение может быть проведено одни-
page:15 ми рациональными операциями. Поэтому коэффициенты получившегося в итоге уравнения будут рациональными функциями x_0; кроме того оно должно иметь степень n и обращаться в тождество в n точках искомой группы (среди которых находится и точка x_0). Искомое уравнение, следовательно, имеет вид:

$$F(x_0, x) \equiv a_0(x_0)x^n + a_1(x_0)x^{n-1} + \dots a_n(x_0) = 0, \tag{6}$$ eq:1.2:

где a_i – полиномы относительно x_0.

Считая x_0 переменной величиной, имеем алгебраическую зависимость между x_0 и остальными $n-1$ точками той группы, в которую входит x_0. Но и наоборот, когда задано x, уравнение (6) обратится в тождество при тех значениях x_0, которые принадлежат той же группе, что и точка x. Таким образом, уравнение (6) симметрично относительно x и x_0.

Теперь мы можем сделать след. замечания:

1.) Полином $a_0(x_0)$ не может быть равен нулю тождественно, если, как мы и предполагаем, все n точек группы, содержащей x_0, меняются при изменениях x_0. Если бы a_0 было тождественно равно нулю, то тогда через каждую точку x_0 проходила бы группа, содержащая точку $x = \infty$, то есть группы системы Σ имели бы неподвижную точку. Очевидно, для наших целей от неподвижных точек, принадлежащих всем группам ряда, можно отказаться.

2.) Не все из рациональных функций

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$$

могут сводится к постоянной, поскольку в противном случае уравнение (6) приобрело бы вид

$$F(x_0, x) \equiv a_0(x_0)\left\{x^n + k_1 x^{n-1} + \dots + k_n\right\},$$

где k_i – некоторые постоянные. Тогда точка x_0 в тех своих положениях, в которых полином a_0 не обращается в нуль, принадлежала бы неподвижной группе, описываемой следующим уравнением:

$$x^n + k_1 x^{n-1} + \cdots + k_n,$$

и не могла бы двигаться вдоль прямой произвольным образом.

page:16 После этих вводных замечаний среди указанных рациональных функций можно найти одну действительно зависящую от x_0. Пусть, для определенности, таковой будет $\frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)}$; тогда положим

$$\frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)} = t.$$

Из алгебры известно, что эти рациональные функции являются симметрическими функциями корней уравнения (6). Эти корни – координаты $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ точек группы, содержащей точку x_0. В частности,

$$\frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)} = -(x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}).$$

Поскольку правая часть этого равенства не меняется при перестановках корней x_i, верно

$$\frac{a_1(x_0)}{a_0(x_0)} = \frac{a_1(x_1)}{a_0(x_1)} = \cdots = \frac{a_1(x_{n-1})}{a_0(x_{n-1})}.$$

Это означает, что уравнение

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = t \quad \text{или} \quad a_1(x) - t a_0(x) = 0$$

обращается в тождество в n точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ одной группы системы Σ. Но с другой стороны, степень полиномов a_0 и a_1 не может быть больше n, поскольку полином F относительно переменной x имеет степень n и предположение о том, что его степень по x_0 выше, пришло бы в противоречие с отмеченной выше симметричностью уравнения $F(x_0, x) = 0$ относительно x и x_0. Итого: уравнение

$$a_1(x) - t a_0(x) = 0$$

описывает все группы Σ, когда t рассматривается как переменный параметр. Тем самым доказано, что Σ – линейный ряд.

n:6 **6. Теорема** Люрота**.** Прежде чем заняться применением леммы к доказательству теоремы 1.2.1, сформулированной в № 4, придадим самой лемме другую форму, весьма полезную для дальнейшего.

Предположим, что координаты (x, y) точки плоской кривой C являются рациональными функциями параметра t, то есть кривую можно описать
page:17 параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{7}$$ eq:1.2:

где φ и ψ – рациональные функции. Уравнение $f(x, y) = 0$ кривой получится, если исключить t из уравнений (7). Каждому значению t соответствует в силу (7) *одна точка* кривой C; но можно ли утверждать обратное, что, именно, каждой точке C отвечает единственное значение t? Легко привести пример, показывающий что далеко не всегда точке кривой C отвечает единственное значение t: такова парабола

$$x = t^2, \quad y = 1 + t^4.$$

Здесь каждой точке параболы отвечает два значения t, отличающиеся друг от друга знаком; однако, сделав замену переменных $\tau = t^2$, приведем точки кривой и новый параметр во взаимно-однозначное соответствие.

В общем же случае мы можем утверждать след.: если задана общая точка кривой C, то есть общее решение (x, y) уравнения $f = 0$, то среди решений уравнения $x = \varphi(t)$ найдется некоторое число решений $t_1, t_2, \ldots, t_n$, удовлетворяющих и уравнению $y = \psi(t)$.

Интерпретируем теперь переменную t как координату точки на некоторой прямой u.

Когда подвижная точка (x, y) описывает кривую C, точки с координатами $t_1, t_2 \ldots, t_n$ на прямой u пробегают ряд Σ, который обладает тем свойством, что каждой произвольным образом выбранной точке прямой u отвечает одна единственная группа системы Σ. Доказанная выше лемма позволяет описать группы системы Σ уравнением вида

$$a(t) - \lambda b(t) = 0,$$

где a и b – полиномы степени n, а λ – параметр, при изменении которого группа описывает систему Σ.

Поскольку точки кривой C и значения параметра λ состоят во взаимно-однозначном соответствии с группами системы Σ, и между точками (x, y) кривой C значениями параметра λ имеется алгебраическое соответствие, причем произвольной точке кривой C соответствует одно единственное значение λ и наоборот, произвольному значению λ – одна единственная точка (x, y) кривой C. Отсюда получается, что координаты (x, y) подвижной точки кривой C являются *однозначными алгебраическими функциями, то есть рациональными функциями* параметра λ (см. Введение, I). Таким образом, мы можем написать:

page:18

$$x = \xi(\lambda), \quad y = \eta(\lambda), \tag{8}$$

eq:1.2:

где ξ и η – рациональные функции; причем одной точке (x, y) кривой C соответствует одно единственное значение λ.

Иными словами, кривая C оказывается некоторым *алгебраическим соответствием* (то есть соответствием, которое можно выразить при помощи алгебраических операций) взаимно-однозначно соотнесена с прямой, координатами точек которой мы считаем значения параметра λ. Кривая, обладающая этим свойством называется *рациональной.*

Доказанное можно сформулировать следующим образом:

Если координаты точки алгебраической кривой можно выразить как рациональные функции параметра t так, что точке кривой отвечает $n > 1$ значений параметра, то эти координаты можно выразить и при помощи рациональных функций нового параметра λ, являющегося рациональной функцией t, с тем, чтобы одной точке кривой отвечало одно единственное значение параметра λ.

С геометрической точки зрения это означает след.:

th:Luroth **Теорема 1.2.2** (Люрота[6]). *Если между точками алгебраической кривой C и прямой u можно установить такое алгебраическое соответствие, что точке кривой C соответствует n точек прямой u, а точке прямой u – лишь одна единственная точка кривой C, то кривая C может быть соотнесена с прямой u также и при помощи взаимно однозначного соответствия.*

n:7 **7. Алгебраические системы плоских кривых индекса 1.** Вернемся, наконец, к доказательству теоремы 1.2.1 из № 4, согласно которой алгебраическая система индекса 1 является линейной.

Мы начнем со случая пучка (то есть системы размерности 1). Итак, пусть Σ – алгебраическая ∞^1-система плоских кривых порядка n и пусть известно, что через произвольную точку плоскости проходит одна единственная кривая этой системы. Посечем систему Σ произвольной прямой, на которой получим алгебраический ряд групп n точек, обладающий тем свойством, что каждая точка прямой принадлежит одной единственной
page:19 группе ряда. Согласно лемме из № 5 этот ряд должен быть линейным, то есть его группы можно взаимно однозначно и при помощи одних алгебраических действий сопоставить со значениями параметра λ.

Мы утверждаем, что между значениями параметра λ и кривыми Σ тоже имеется взаимно однозначное соответствие. В самом деле, если задано значение параметра λ, то можно найти чисто алгебраическим путем соответствующую этому значению группу (то есть координаты точек этой группы), а по группе – ту кривую системы Σ, которая проходит через эти точки (это так, поскольку для разыскания этой кривой на кривые системы следует наложить одно линейное условие прохождения через точку). Таким образом, чисто алгебраическим путем по значению λ устанавливается одна вполне определенная кривая системы Σ. И наоборот, если задана такая кривая, то путем решения алгебраического уравнения мы можем определить координаты точек, по которым эта кривая пересекает секущую, а по этой группе – одно вполне определенное значение параметра λ.

Можно еще заметить, что для определения значения параметра λ по заданной кривой системы Σ требуются только рациональные операции, поскольку λ является *рациональной* симметрической функцией той группы, по которой кривая пересекает секущую.

Мы установили, что кривая системы Σ зависит от λ алгебраически, причем каждому значению λ отвечает *одна единственная* кривая системы Σ; иными словами, коэффициенты подвижной кривой системы Σ являются однозначными алгебраическим (то есть рациональными) функциями параметра λ. Поэтому кривые системы Σ можно описать уравнением вида

$$f(x, y; \lambda) = 0,$$

где f – полином по (x, y), коэффициенты которого являются рациональными функциями λ. Умножая это уравнение на подходящий полином по λ, можно избавиться от дробей, и получить уравнение вида

$$\lambda^k \varphi_0(x, y) + \lambda^{k-1} \varphi_1(x, y) + \cdots + \varphi_k(x, y) = 0,$$

где φ_i – полиномы степени $\leq n$. (*Все* полиномы должны быть степени n, если перейти к однородным координатам).

Чтобы получить уравнение той кривой, которая проходит через произвольную точку (x_0, y_0) плоскости, следует придать параметру λ значение,
page:20 удовлетворяющее уравнению

$$\lambda^k \varphi_0(x_0, y_0) + \lambda^{k-1} \varphi_1(x_0, y_0) + \cdots + \varphi_k(x_0, y_0) = 0.$$

Но через точку (x_0, y_0) проходит одна единственная кривая системы Σ, поэтому это уравнение относительно λ должно иметь один единственный корень, то есть или быть уравнением первой степени, или его правая часть должна сводиться к k-ой степени выражения вида

$$\lambda \psi_0(x_0, y_0) + \psi_1(x_0, y_0),$$

где ψ_0 и ψ_1 – полиномы степени $\leq \frac{n}{k}$. (Оба эти полинома в однородных координатах имели бы степень $\frac{n}{k}$.) Но в этом последнем случае любая кривая системы Σ имела бы уравнение вида

$$(\lambda\psi_0(x,y) + \psi_1(x,y))^k = 0,$$

и была бы приводимой, что мы исключили из рассмотрения. Итого: при $k = 1$ полчается, что уравнение кривой системы Σ имеет вид:

$$\lambda\varphi_0(x,y) + \varphi_1(x,y) = 0.$$

Тем самым теорема доказана для случая, когда система Σ является пучком.

Мы распространим это утверждение на алгебраическую систему Σ размерности r по индукции: итак, предположим, что теорема доказана для систем размерности $r-1$. Обозначим систему, образованную всеми кривыми этого семейства проходящими через точку P, как $\Sigma(P)$, а систему, образованную всеми кривыми, проходящими через точки P, Q, как $\Sigma(P,Q)$ и т.д. Если рассматриваемые точки не занимают особых положений на плоскости все эти системы по предположению индукции являются линейными.

Возьмем на плоскости три общие точки P, Q и R, первые две будем считать постоянными, последую же подвижной. Система $\Sigma(P)$ является линейной и, следовательно, ее можно описать уравнением вида

$$\lambda_1 f_1(x,y) + \lambda_2 f_2(x,y) + \cdots + \lambda_r f_r(x,y) = 0,$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_r$ – линейно независимы. Возьмем кривую f_0 системы Σ, проходящую через точку Q, но не через точку P, и сравним исходную систему с системой Σ', заданной уравнением

$$\lambda_0 f_0(x,y) + \lambda_1 f_1(x,y) + \cdots + \lambda_r f_r(x,y) = 0.$$

Начнем с того, что $\Sigma'(P) = \Sigma(P)$ и поэтому линейная система $\Sigma'(P,R) = \Sigma(P,R)$ размерности $r-2$ принадлежит как $\Sigma(R)$, так и $\Sigma'(R)$. Еще одну кривую, принадлежащую этим системам, можно построить так. Возьмем общую кривую f в системе $\Sigma(P,Q)$ и составим пучок

$$\mu_0 f_0 + \mu_1 f = 0.$$

Этот пучок принадлежит системе $\Sigma(Q)$ в силу ее линейности, а следовательно и системе Σ. С другой стороны, f выражается линейно через $f_1, \ldots, f_r$ и поэтому весь этот пучок принадлежит и Σ'. Это означает, что кривая этого пучка, проходящая через точку R, принадлежит как $\Sigma(R)$, так и $\Sigma'(R)$. К тому же эта кривая не может выражаться линейно через кривые системы $\Sigma(P, R)$, поскольку она не проходит через точку P, если, конечно, считать особыми все положения точки R на кривой f. Итого: имеется r линейно независимых кривых, принадлежащих обеим линейным системам $\Sigma(R)$ и $\Sigma'(R)$, поэтому обе системы совпадают. [7] Делая теперь точку R подвижной, видим, что система Σ совпадает с линейной системой Σ'.

Замечание. По ходу доказательства мы молчаливо предполагали, что заданная система Σ не содержит частей меньшей размерности, чем r. *Поэтому относительно вида алгебраических систем, для которых справедливо утверждение № 4, следует сделать следующие ограничения:*

a) Ее кривые должны быть не все кратными, то есть не все среди них должны быть получены путем повторения несколько раз кривых некоторой алгебраической системы.

b) Система не должна быть составлена из алгебраической ∞^r-системы и другой системы меньшей размерности.

Эти ограничения очевидно *необходимы.*

n:8 **8. Дифференциальное свойство плоских кривых, меняющихся внутри некоторой непрерывной системы и имеющих подвижную кратную точку.** Обратимся теперь к доказательству дифференциального свойства плоских (быть может даже и не алгебраических) кривых, которым
page:22 мы воспользуемся далее при доказательстве теоремы Бертини о линейной системе кривых.

Рассмотрим непрерывную систему кривых; пусть

$$f(x, y; t) = 0$$

[7] Здесь оригинальный ход доказательства сохранен, но текст несколько переработан. – Перев.

– уравнение произвольной кривой этого семейства, причем t – параметр, определяющий положение кривой в системе. Будем далее молчаливо предполагать, что функция f дифференцируема достаточное для дальнейших выкладок число раз.

Кривая $f = 0$ может иметь некоторое число подвижных двойных точек, то есть точек меняющихся при изменении параметра t. Возьмем некоторую частную кривую семейства, скажем, $f(x, y; t_0) = 0$, и обозначим ее подвижную двойную точку как $P(x_0, y_0)$. Докажем, что кривая

$$f(x, y; t_0 + dt) = 0,$$

бесконечно близкая к кривой $f(x, y; t_0) = 0$, проходит через точку P, то есть значение, которое функция $f(x, y; t_0+dt)$ принимает при $x = x_0$, $y = y_0$ является бесконечно малой большего порядка, если dt считать бесконечно малой первого порядка.

Сделанные относительно точки P предположения означают, что на бесконечно близкой к $f(x, y; t_0) = 0$ кривой имеется двойная точка $\overline{P}$, бесконечно близкая к точке P, то есть, иными словами, что существуют две *однозначные*, определенные и дифференцируемые в окрестности точки $t = t_0$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, такие, что точка с координатами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ является двойной точкой кривой $f(x, y; t) = 0$.

Если мы в уравнение $f(x, y; t) = 0$ на место x, y подставим φ, ψ, то получим тождество относительно переменной t. Дифференцируя это тождество по t, получим

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

где под x и y следует понимать функции φ и ψ. Но по предположению точка с координатами x, y является двойной для f, поэтому должно быть верно

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Отсюда получается, что в точке с координатами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ равна нулю при всех значениях t, лежащих в рассматриваемой окрестности точки $t = t_0$. В частности, при $t = t_0$ верны соотношения

$$f(x_0, y_0; t_0) = 0 \quad \text{и} \quad f'_t(x_0, y_0; t_0) = 0.$$

Разлагая теперь функцию $f(x_0, y_0; t_0 + dt)$ в ряд Тейлора, имеем

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0; t_0 + dt) &= f(x_0, y_0; t_0) + f'_t(x_0, y_0; t_0)dt + \frac{1}{2} f''_t f(x_0, y_0; t_0)dt^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{2} f''_t f(x_0, y_0; t_0)dt^2 + \frac{1}{6} f'''_t f(x_0, y_0; t_0)dt^3 + \ldots \end{aligned}$$

Это и доказывает, что $f(x_0, y_0; t_0 + dt)$ является бесконечно малой большего порядка, чем dt.[8]

Доказанное можно сформулировать так:

Если некоторая подвижная кривая C некоторой непрерывной системы имеет подвижную двойную точку P, то каждая кривая системы, бесконечно близкая к C, проходит через точку P хотя бы однократно.

При доказательстве мы рассматривали случай однопараметрического семейства кривых; но результат может быть распространен и на случай большего числа параметров.

Заметим, что теорема остается верной, если P точка кратности k кривой C $(k > 2)$; поскольку для доказательства необходимо только, чтобы обращались в нуль производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке (x, y).

Как можно сформулировать полученный результат в конечной форме?

Если кривая C пробегает кривые некоторой непрерывной ∞^1-системы и если некоторое ее положение C_0 зафиксировано, то под *характеристической группой* кривой C_0 понимают группу точек (число которых может быть как конечно, так и бесконечно), к которым стремятся точки пересечения подвижной кривой C с кривой C_0 при стремлении кривой C к кривой C_0. Множество характеристических групп кривых системы образует некоторую кривую, которую называют *огибающей* (curva inviluppo) системы. Рассматривая системы большей размерности, все еще можно определить

[8] Севери не использовал здесь символы о-малое и О-большое, впервые употребленные Э. Ландау год спустя (в 1909 году), однако при их использовании эта и следующие выкладки много выигрывают в простоте. – Перев.

характеристические группы; но таковых на одной постоянной кривой будет уже бесконечно много. Каждая ∞^1-система, содержащаяся в рассматриваемой системе, даст свою огибающую.

Доказанная выше теорема может быть теперь сформулирована следую-
page:24 щим образом:

Если плоская подвижная кривая C, пробегающая кривые некоторой непрерывной системы, имеет подвижную двойную точку, то эта точка принадлежит каждой характеристической группе кривой C. [9]

---

[9]Итальянские геометры, начиная с Кремоны, традиционно смело использовали понятие бесконечно малого, Севери же в своих лекциях пытается придать ему более строгий смысл. По существу, в тексте вполне строго доказано следующее утверждение: если в окрестности точки $t = t_0$ существуют такие дифференцируемые функции $\varphi(t), \psi(t)$, что при всех рассматриваемых значениях t верно $f(\varphi(t)+dx, \psi(t)+dy, t) = O(dx^2+dy^2)$, то $f(\varphi(t_0), \psi(t_0); t_0+dt) = o(dt)$. Приняв, что утверждение «кривая, бесконечно близкая к $f(x, y; t_0) = 0$, проходит через точку (x_0, y_0) кривой $f(x, y; t_0) = 0$» означает просто, что $f(x_0, y_0; t_0 + dt) = o(dt)$, можно было бы считать обсуждаемую теорему строго доказанной. Однако Севери желает интерпретировать это утверждение в конечном виде, и, вероятно, полагает очевидным след. утверждение: для того, чтобы характеристическая группа кривой $f(x, y, t_0) = 0$ семейства $f(x, y, t) = 0$ содержала точку (x_0, y_0), необходимо и достаточно, чтобы $f(x_0, y_0; t_0+dt) = o(dt)$. Впрочем очевидно и то, что это утверждение требует некоторых оговорок, поскольку, напр., характеристическое семейство кривой $g(x, y) = 0$ семейства $g(x, y) = t^2$ пусто, хотя равенство $g(x_0, y_0) - t^2 = o(t)$ выполняется в любой точке кривой g.

Попытаемся доказать сказанное, опираясь на подготовительную теорему Вейерштрасса. Пусть (x_0, y_0) – какая угодно точка кривой $f(x, y, t_0) = 0$. Все точки этой кривой, лежащие в достаточно малой окрестности этой точки лежат на одной или нескольких дугах, каждую из которых можно представить параметрически в виде

$$x = x_0 + \tau\mathfrak{P}_1(\tau), \quad y = y_0 + \tau\mathfrak{P}_2(\tau),$$

причем между параметром τ и точками дуги имеется взаимно-однозначное соответствие. Эта дуга пересекает кривую $f(x, y, t) = 0$ в точках, соответствующих значениям параметра τ, удовлетворяющим уравнению

$$f(x_0 + \tau\mathfrak{P}_1(\tau), y_0 + \tau\mathfrak{P}_2(\tau), t) = 0,$$

которое можно записать в виде

$$(t - t_0)^p[h_0(t) + h_1(t)\tau + \dots] = 0,$$

где уже не все полиномы $h_0, h_1, \dots$ делятся на $t - t_0$.

Если $h_0(t_0) \neq 0$, то это уравнение не имеет корней при достаточно малых t, а, следовательно, рассматриваемая дуга кривой $f(x, y, t_0) = 0$ не пересекает кривую $f(x, y, t) = 0$.

Если же $h_0(t_0) = 0$, то, коль скоро среди $h_k(t_0)$ имеются отличные от нуля, рассматриваемое уравнение в малой окрестности точки $t = t_0$, $\tau = 0$ эквивалентно уравнению вида

$$\tau^k + s_1(t)\tau^{k-1} + \dots + s_k(t) = 0,$$

n:9 **9.** Доказанная теорема может быть также распространена на точки, кратности которой больше 2, следующим образом:

Если плоская непрерывно меняющаяся кривая C имеет подвижную точку кратности s, эта точка лежит на каждой бесконечно близкой к C кривой и имеет кратность не меньше чем $(s-1)$.

Докажем это для случая $s = 3$.

По существу нужно показать следующее: если в некоторой окрестности $t = t_0$ точка с координатами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ на кривой $f(x, y; t) = 0$ имеет кратность 3, то кривая $f(x, y; t_0 + dt) = 0$, бесконечно близкая к кривой $f(x, y; t_0) = 0$, проходит с кратностью 2 или большей через точку $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, в которой кривая $f(x, y; t_0) = 0$ имеет кратность 3.

По предположению точка (x, y) имеет кратность 3 на кривой $f(x, y; t) = 0$, что аналитически выражается обращением в нуль в точке (x, y) функции f и ее первых и вторых производных по x, y. Следовательно, точка (x, y) для обеих кривых

$$f'_x(x, y; t) = 0 \quad \text{и} \quad f'_y(x, y; t) = 0$$

является двойной. Применяя теорему из предыдущего номера, видим, что

где s_i – ряды по степеням $t - t_0$, обращающиеся в нуль при $t = t_0$. Корни этого уравнения (быть может, совпадающие) можно представить как степенные ряды по дробным степеням $t - t_0$; при $t \to t_0$ эти функции обращаются в нуль, поскольку $s_i(t_0) - 0$, следовательно, рассматриваемая дуга кривой $f(x, y, t_0) = 0$ пересекает кривую $f(x, y, t) = 0$ в одной или нескольких точках, стремящихся к (x_0, y_0) при $t \to t_0$.

Остается увязать условие $h_0(t_0) = 0$ с условием $f(x_0, y_0, t) = o(t - t_0)$ или $f_t(x_0, y_0, t_0) = 0$. Из очевидных тождеств

$$f(x, y, t) \equiv f(x, y, t_0) + f_t(x, y, t_0)(t - t_0) + \ldots, \quad f(x_0 + \tau\mathfrak{P}_1(\tau), y_0 + \tau\mathfrak{P}_2(\tau), t_0) \equiv 0,$$

видно, что в общем случае в разложении

$$f(x_0 + \tau\mathfrak{P}_1(\tau), y_0 + \tau\mathfrak{P}_2(\tau), t) \equiv (t - t_0)^p[h_0(t) + h_1(t)\tau + \ldots]$$

число $p = 1$ и тогда $h_0(t_0) = f_t(x_0, y_0, t_0)$. Однако возможны и вырождения, когда $p > 1$ и тогда условия $f_t(x_0, y_0, t_0) = 0$ и $h_0(t_0) \neq 0$ могут оказаться совместными. Напр., возьмем произвольную точку (x_0, y_0) кривой $g(x, y) = 0$ семейства $g(x, y) = t^2$ $(t_0 = 0)$, на любой дуге кривой имеем

$$f(x, y, t) \equiv g(x(\tau), y(\tau)) - t^2 \equiv -t^2,$$

то есть $h_0(t) = -1$, а прочие $h_i(t)$ тождественно равны нулю; и при этом $f_t(x_0, y_0, 0) = 0$. – Перев.

кривые

$$f'_x(x, y; t_0 + dt) = 0 \quad \text{и} \quad f'_y(x, y; t_0 + dt) = 0,$$

бесконечно близкие соответственно к кривым

$$f'_x(x, y; t_0) = 0 \quad \text{и} \quad f'_y(x, y; t_0) = 0,$$

проходят через точку $P(x_0, y_0)$. И поскольку через эту точку проходит также и кривая $f(x, y; t_0 + dt) = 0$, то, следовательно, эта точка P является двойной для последней кривой.

Этот прием доказательства непосредственно переносится на случай произвольного s.

n:10 **10. Теорема** БЕРТИНИ **о кратных точках кривых линейной системы.** Доказанные выше теоремы имеют в высшей степени плодотворные page:25 приложения в алгебраической геометрии. Покажем для начала, как из них можно вывести следующее:

h:Bertini:1 **Теорема 1.2.3** (Первая теорема БЕРТИНИ[10]). *Общая кривая линейной системы плоских алгебраических кривых не может иметь подвижных кратных точек, то есть все ее кратные точки являются базовыми.*

Пусть Σ – заданная линейная система, а C – *общая* кривая этой системы. Если точка P является кратной для кривой C, то каждая кривая $\overline{C}$ системы Σ, бесконечно близкая к C, обладает кратной точкой $\overline{P}$, бесконечно близкой к P или с ней совпадающей. В обоих случаях согласно теореме из № 9 кривая $\overline{C}$ проходит через точку P. Сделав это предварительное замечание, рассмотрим в системе Σ любую кривую C_0, отличную от C, и обозначим как H пучок, заданный кривыми C_0 и C. Подвижная кривая этого пучка пересекает C только в базовых точках пучка, то есть в общих точках кривых C и C_0. Но с другой стороны, кривая пучка H, бесконечно близкая к C, проходит через точку P, которая, следовательно, является базовой точкой пучка, то есть кривая C_0 тоже должна проходить через эту точку. Поскольку C_0 – произвольная кривая системы Σ, то, следовательно, точка P должна быть базовой точкой системы.[11]

n:11 **11. Отступление о первой формуле** Плюкера. Обратимся теперь к другому весьма элегантному приложению теоремы из № 8. Речь о доказательстве *формулы Плюкера*[12], которая позволяет вычислить *класс* кривой по числу δ ее двойных точек (с различными касательными) и числу k ее точек возврата (двойных точек с двумя совпадающими касательными).

Под классом алгебраической кривой C порядка n понимают число касательных, которые можно провести к кривой из общей точки P плоскости. Проектируя заданную кривую из некоторой точки на надлежащим образом проведенную плоскость, нетрудно видеть, что можно принять за определение класса также и число касательных, которые можно провести к кривой в заданном направлении (при этом точка P_∞ лежит на бесконечности).

Подвергнем теперь нашу так преобразованную кривую, которую опять будем обозначать как C, бесконечно малому параллельному переносу в page:26 направлении бесконечно удаленной точки P_∞, и обозначим получившуюся в результате этого сдвига кривую как $\overline{C}$. Если A и B – бесконечно близкие точки, принадлежащие одновременно и кривой C и касательной, проведенной в направлении точки P_∞, то очевидно, что при бесконечно малом переносе точка A перейдет в B, так, что точки касания искомых касательных принадлежат множеству точек пересечения кривых C и $\overline{C}$.

Помимо них, эти кривые пересекаются еще в следующих точках:

a) В n бесконечно удаленных точках кривой C, поскольку перенос не меняет точек, лежащих на бесконечности.

b) В δ двойных точках C. В самом деле, в силе теоремы № 8 кривая $\overline{C}$ проходит через каждую двойную точку хотя бы один раз.[13] Кроме того,

[11]Это синтетическое доказательство теоремы Бертини было указано в заметке автора (Torino Atti, Dezember 1906) как промежуточный результат при куда более общих предположениях. – Автор.

[12]J. Plücker, Theorie der algebraischen Curven. Bonn, 1839. S. 200 ff.

[13]Если через точку D кривая $\overline{C}$ будет проходить дважды, напр., если одна из касательных в этой точке идет в направлении точки $P\infty$. Однако этот случай можно исключить из рассмотрения, поскольку P – общая точка плоскости и через нее не проходят касательные к кривой в кратных точках.

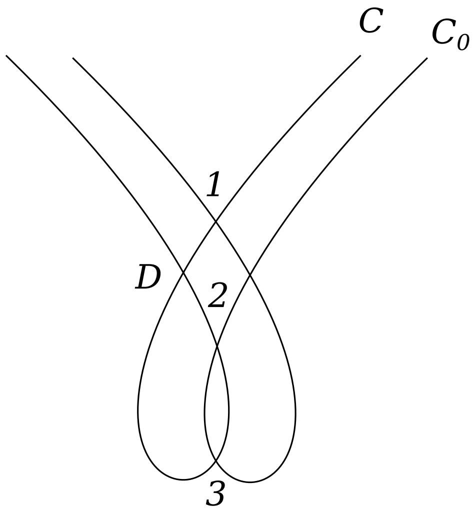

Рис. 1: К № 11

fig:1

каждая такая точка среди точек пересечения кривых C и $\overline{C}$ должна считаться дважды, поскольку она является двойной для кривой C. Впрочем, в этом можно убедится, взглянув на фиг.: если кривая C при параллельном переносе переходит в кривую C_0, то *две* из точек пересечения кривых C и C_0 (на Рис. 1 эти точки обозначены как 1 и 2) переходят в двойную точку D при совмещении кривой C с C_0.

c) В k точках возврата C, поскольку в силу теоремы № 8 кривая $\overline{C}$ проходит и через эти точки. Но и теперь можно дать наглядное объяснение тому, что каждая из точек возврата считается за три точки пересечения: именно, точку возврата можно рассматривать как узел (то есть обыкновенную двойную точку) с затянутой петлей (un nodo, che si vada stringendo indefinitamente). Когда кривая C_0 стремится к кривой C, три точки пересечения этих кривых стремятся к точке возврата (на фигуре эти три точки обозначены как 1, 2 и 3). Это позволяет утверждать, что *бесконечно близко к C кривая $\overline{C}$ не просто проходит через точку возврата D кривой C, но и что она в этой точке имеет ту же касательную, что и C.*

Обозначив класс кривой C как m, мы, таким образом, имеем

$$m + n + 2\delta + 3k = n^2,$$

то есть

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3k.$$

Это и есть первая формула Плюкера. Приведенное здесь доказательство, раскрывающее наглядный смысл формулы Плюкера, принадлежит Беку[14]

n:12 **12. Приводимые линейные системы.** Если произвольная кривая линейной системы алгебраических кривых приводима (то есть есть если ее можно разложить на несколько частей), то такая система называется *при-*

– Перев.

page:27 [14] Beck, Zur allgemeinen Theorie der Kurven und Flächen, Math. Ann. **14**, 207 (1878), а также Zürich. Vierteljahrsschr. **30**, 173 (1889).

водимой.[15]

Простейший пример приводимой линейной системы можно получить, если добавить неподвижную кривую к каждой кривой некоторой неприводимой системы. Используя уравнение

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$$

заданной системы и уравнение $\varphi = 0$ неподвижной кривой, можно составить следующее уравнение приводимой линейной системы:

$$\lambda_0 \varphi f_0 + \lambda_1 \varphi f_1 + \cdots + \lambda_r \varphi f_r = 0$$

Другой пример можно получить следующим образом: пусть

$$\lambda u(x, y) - \mu v(x, y) = 0$$

– пучок алгебраических кривых порядка n. Кривые этого пучка можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с точками прямой, рассматривая пару λ, μ как однородные координаты подвижной точки этой прямой. Мы можем рассмотреть на этой прямой *линейный ∞^r-ряд групп k точек*, то есть систему групп точек, описанную уравнением вида

$$\nu_0 \varphi_0(\lambda, \mu) + \nu_1 \varphi_1(\lambda, \mu) + \cdots + \nu_r \varphi_r(\lambda, \mu) = 0,$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ – линейно независимые формы порядка k.

Группам ряда в пучке отвечают группы k кривых, меняющиеся в некотором линейном ∞^r-семействе. Кривые [точнее говоря, объединения k кривых одной группы] этого последнего семейства описываются уравнением

$$\nu_0 \varphi_0(v, u) + \nu_1 \varphi_1(v, u) + \cdots + \nu_r \varphi_r(v, u) = 0$$

и, стало быть, образуют линейную ∞^r-систему, все кривые которой разлагаются на k подвижных частей, принадлежащих одному и тому же пучку. Другая теорема Бертини как раз и утверждает, что двумя приведенными примерами исчерпываются все приводимые системы:

[15] Было бы лучше говорить «линейная система приводимых кривых». Однако указанный общепринятый оборот речи применительно к линейным системам не может стать поводом к недоразумениям, возможным при его употреблении по отношении к произвольным алгебраическим системам. –Автор.

h:Bertini:2 **Теорема 1.2.4** (Вторая теорема Бертини[16]). *Если каждая кривая линейной системы разлагается на несколько компанент, то или все кривые системы имеют общую составную часть или они составлены из k кривых, принадлежащих одному и тому же пучку.* (Конечно, обе указанные возможности могут произойти и одновременно.)

page:28

Сразу исключим из рассмотрения случай, когда все кривые нашей линейной системы Σ имеют общую составную часть, и обозначим как $C_1, C_2, \ldots, C_k$ подвижные кривые, на которые разлагается общая кривая C системы Σ.

Прежде всего заметим, что компоненты $C_1, C_2, \ldots, C_k$ общей кривой C отличны друг от друга: в противном случае кривая C помимо базовых точек имела бы еще и другие кратные точки, что по первой теореме Бертини (№ 10) невозможно. Обозначим как H – произвольный пучок, содержащийся в системе Σ. Когда кривая C пробегает кривые этого пучка, ее компоненты $C_1, C_2, \ldots, C_k$ описывают некоторые алгебраические ∞^1-системы, скажем, $H_1, H_2, \ldots, H_k$. Докажем от противного, что эти алгебраические системы совпадают с одним и тем же пучком. В самом деле, если системы H_1 была бы отлична от системы H_2, то можно было бы указать кривую из H_1 и кривую из H_2, проходящие через произвольную точку P плоскости, но при этом отличные друг от друга. Эти кривые не могут быть ни составными частями двух различных кривых пучка H, поскольку через точку P проходит только одна кривая этого пучка, ни составными частями одной и той же кривой C, поскольку произвольная кривая системы Σ имеет кратные точки разве лишь в базовых точках. Таким образом, сделанное предположение ведет к противоречию, а значит, алгебраические системы систем $H_1, H_2, \ldots, H_k$ совпадают друг с другом. Система H_1 является линейной в силу теоремы из № 7: через точку P проходит только одна кривая пучка H, а следовательно и только одна кривая пучка H_1.[17]

[17] При переводе этого абзаца были внесены некоторые изменения: в оригинале и немецком переводе были введены лишние обозначения, но не была доказана линейность пучка. – Перев.

n:13 **13. Простые и составные линейные системы.** Введем еще понятия *простой* и *составной линейной системы.* Линейная ∞^r-система Σ называется составной, если все ее кривые, проходящие через произвольную точку
page:29 P плоскости, должны проходить также и через другую точку, отличную и от P и от базовых точек[18]; в противном случае система называется простой.

Система всех прямых плоскости и система всех конических сечений являются простыми системами, сеть всех плоских кривых третьего порядка, проходящих через 7 произвольных точек, является составной.

Рассмотрим составную систему Σ, в которой две кривые имеют общими помимо базовых еще D других (подвижных) точек, или, как говорят для краткости, систему *степени* D. Если все кривые системы Σ, проходящие через произвольную точку P, пересекаются еще в других точках, отличных от P и базовых точек, то, очевидно, что число $i-1$ таких точек не меняется при изменении положения точки P; поэтому D точек пересечения двух кривых системы, отличных от базовых точек, можно разделить на $\frac{D}{i}$ групп по i точек так, чтобы кривая системы, проходящая через одну точку группы, неизбежно проходит и через остальные $i-1$ точек этой группы.

Составной системе кривых, таким образом, можно поставить в соответствие алгебраическую систему ∞^2 групп i точек, такую, что каждая точка плоскости принадлежит одной единственной группе. Система, обладающая таким свойством, называется *плоской инволюцией порядка* i.

Очевидно, что любая сеть степени $D > 1$ является составной системой и ей отвечает инволюция порядка D. Сеть степени $D = 1$ называют *гомолоидной сетью.* Таковыми являются, напр, система всех прямых, система конических сечения, проходящих через три точки, система кривых четвертого порядка, проходящих через три двойные точки и три простые, и т.д.

[18]Любой точке P плоскости можно сопоставить линейное условие (P), налагаемое на систему. Приняв это, предыдущее определение можно сформулировать так: если из условия (P), наложенного на систему, следует условие (Q), причем точка Q отлична от P и базовых точек системы, то система называется составной. – Перев.

2 Рациональные и бирациональные преобразования

2.1 Рациональные и Кремоновы преобразования между плоскостями

n:14 **14. Рациональные преобразования одной плоскости в другую.** Рассмотрим формулы

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \rho x_2' &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \rho x_3' &= f_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \tag{9}$$ eq:2.1:

где f_1, f_2, f_3 – три алгебраические формы одного порядка относительно переменных x_1, x_2, x_3. Если интерпретировать x_1, x_2, x_3 как однородные координаты переменной точки x на плоскости X, а x_1', x_2', x_3' – однородные координаты переменной точки x' на плоскости X', то по формулам (9) произвольной точке x на X ставят в соответствие одну единственную точку x' на X'.

Спрашивается, как движется точка x', когда x пробегает плоскость X? Попытаемся выяснить, при каких условиях точка x'пробегает всю плоскость X'.

Сразу исключим из рассмотрения случай, когда формы f_1, f_2, f_3 различаются только постоянным множителем, поскольку тогда всем точкам плоскости X ставится в соответствие одна и та же точка x'. Это, очевидно, единственный случай, когда при движении точки x соответствующая ей точка x' остается неподвижной; в самом деле, если при произвольных значениях переменных x_1, x_2, x_3 отношения $\frac{f_1}{f_3}, \frac{f_2}{f_3}$ должны иметь постоянные значения, то верно

$$f_1 = af_3, \quad f_2 = bf_3,$$

где a и b – постоянные множители.

Далее, можно исключить случай, когда формы f_1, f_2, f_3 имеют общий
page:31 множитель, поскольку если такой множитель имеется, то мы можем его

сократить, не изменив при этом отношений форм f_i, от которых только и зависит положение точки x'.

Исследуем теперь следующий вопрос: при каких условиях две точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ плоскости X переходят в одну и ту же точку x'. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было верно

$$f_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sigma f_i(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (i = 1, 2, 3)$$

где σ – коэффициент пропорциональности. Обозначим как Σ линейную систему

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0,$$

размерность которой по крайней мере не меньше 1, тогда каждая кривая Σ, проходящая через точку α, соответствует таким значениям параметров λ_i, для которых верно равенство

$$\lambda_1 f_1(\alpha) + \lambda_2 f_2(\alpha) + \lambda_3 f_3(\alpha) = 0,$$

а следовательно, и

$$\lambda_1 f_1(\beta) + \lambda_2 f_2(\beta) + \lambda_3 f_3(\beta) = 0,$$

то есть все такие кривые проходят и через точку β.

Мы молчаливо подразумеваем, что в точках α и β формы f_i не могут обращаться в нуль одновременно, то есть что α и β не совпадают с базовыми точками системы Σ. Более того, точка x', соответствующая базовой точке системы, и не может быть указана, поскольку три ее однородные координаты равны нулю.

Если же, наоборот, две, отличные от базовых точек системы Σ, точки α и β плоскости X обладают тем свойством, что все кривые системы Σ, проходящие через одну из них, проходят и через другую, то этим точкам соответствует одна и та же точка x'. В самом деле, в этом случае линейное уравнение

$$\lambda_1 f_1(\alpha) + \lambda_2 f_2(\alpha) + \lambda_3 f_3(\alpha) = 0$$

между λ_i дает в точности такое же условие, как и уравнение

$$\lambda_1 f_1(\beta) + \lambda_2 f_2(\beta) + \lambda_3 f_3(\beta) = 0,$$

то есть оба эти уравнения должны быть эквивалентны, другими совами, их коэффициенты должны быть пропорциональны.

list:1 Здесь могут представиться два случая:

1. Кривые системы Σ, проходящие через [общую] точку α плоскости, имеют помимо нее бесконечно много других общих точек, вмести составляющих некоторую алгебраическую кривую.

2. Кривые системы Σ, проходящие через точку α, имеют всего t отличных от базовых общих точек, включая точку α, (причем $t \geq 1$). page:32

Рассмотрим их по-отдельности.

В первой случае система Σ сводится или к пучку, или все кривые системы Σ должны разлагаться на составные части.

[Если система является пучком Σ, то формы f_1, f_2, f_3 линейно зависимы, то есть найдутся такие константы k_1, k_2, k_3, среди которых есть отличные от нуля, что

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) \equiv 0.$$

С геометрической точки зрения, это означает, что когда точка x пробегает точки плоскости X, соответствующая точка x' пробегает лишь прямую

$$k_1 x_1' + k_2 x_2' + k_3 x_3' = 0.]$$

Если же все кривые системы Σ разлагаются на l составных частей, то все эти части подвижны, поскольку иначе формы f_i имели бы общий множитель. Поэтому эти части, в силу теоремы 1.2.4 Бертини (№ 12), принадлежат одному и тому же пучку H. Если

$$u(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad v(x_1, x_2, x_3) = 0$$

– уравнения двух различных кривых пучка H, то левая часть уравнения кривой, составленной из l кривых пучка H, представляет собой бинарную форму l-го порядка относительно переменных u, v, то есть в обсуждаемом случае справедливо представление

$$f_1(x) = \varphi_1(u, v), \quad f_2(x) = \varphi_2(u, v), \quad f_3(x) = \varphi_3(u, v),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – бинарные формы порядка l. Это означает, что когда точка x пробегает плоскость X, соответствующая ей точка x' на плоскости X' пробегает лишь кривую C', которую можно представить параметрически:

$$\rho x'_1 = \varphi_1(u, v), \quad \rho x'_2 = \varphi_2(u, v), \quad \rho x'_3 = \varphi_3(u, v),$$

или, избавившись от однородности в параметрах, в виде

$$\rho x'_1 = \varphi_1(1, \lambda), \quad \rho x'_2 = \varphi_2(1, \lambda), \quad \rho x'_3 = \varphi_3(1, \lambda).$$

Эта кривая является рациональной (см. № 6), причем каждому значению λ соответствует одна точка C', а каждой точке C', скажем, h значений λ. [19]

[19] При переводе была опущена несущественная для описания случая № 1 конструкция, позволяющая охарактеризовать число h, исходя из свойств системы Σ.

Пусть общей точке α плоскости X отвечает точка α' кривой C', тогда имеется h значение параметра λ, скажем, $\lambda_1, \dots \lambda_h$, таких, что

$$\rho\alpha'_1 = f_1(\alpha) = \varphi_1(1, \lambda_i), \quad \rho\alpha'_2 = f_2(\alpha) = \varphi_2(1, \lambda_i), \quad \rho\alpha'_3 = f_3(\alpha) = \varphi_3(1, \lambda_i).$$

Поэтому, если точка β лежит на одной из h кривых

$$v = \lambda_1 u, \quad v = \lambda_2 u, \quad \dots, \quad v = \lambda_h u$$

пучка H, то

$$f_1(\beta) : f_2(\beta) : f_3(\beta) = \varphi_1(1, \lambda_i) : \varphi_2 : (1, \lambda_i) : \varphi_3 : (1, \lambda_i) = f_1(\alpha) : f_2(\alpha) : f_3(\alpha),$$

и поэтому кривая

$$\mu_0 f_1(x) + \mu_1 f_2(x) + \mu_3 f_3(x) = 0$$

системы Σ, проходящая через точку α, неизбежно проходит через точку β. Если же точка β не лежит на этих кривых, то отношение $v(\beta) : u(\beta)$ не совпадает с $\lambda_1, \dots, \lambda_h$, и поэтому

$$f_1(\beta) : f_2(\beta) : f_3(\beta) \neq f_1(\alpha) : f_2(\alpha) : f_3(\alpha),$$

а значит кривая системы Σ, проходящая через точку α, не проходит через точку β. Таким образом, *кривые системы Σ, проходящая через общую точку плоскости, имеют совместными ровно h кривых пучка H.* – Перев.

В частном случае, когда Σ сводится к пучку, формы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ оказываются линейными, а кривая C', следовательно, прямой. page:33

Обратимся теперь ко *второму случаю*, указанному на стр. 35. Легко видеть, что в этом случае точка x' может занимать любое положение на плоскости X': когда точка x движется в плоскости X, описывая кривую C системы Σ, уравнением которой является

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0, \tag{10}$$

eq:2.1:

соответствующая точка x' не может оставаться на месте.

В самом деле, если на кривой C точка x выбрана произвольным образом, то помимо нее еще *только* $t-1$ точек кривой C могут соответствовать той же точке x'. Поэтому когда точка x пробегает кривую C, соответствующая ей точка x' пробегает прямую

$$\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0. \tag{11}$$

eq:2.1:

Когда кривая C пробегает кривые системы Σ, которая необходимо должна быть сетью, и прямая (11) меняется, заметая всю плоскость X'; следовательно, как и утверждалось выше, точка x', отвечающей подвижной точке x, может занимать любое положение на плоскости X'. Итого, между плоскостями X и X' имеется алгебраическое (то есть представимое при помощи алгебраических уравнений) соответствие типа $(t, 1)$; последнее означает, что произвольной точке плоскости X отвечает *одна и только одна* точа плоскости X', а произвольной точке плоскости X' отвечает t точек плоскости X, которые, когда точка x' пробегает плоскость X', описывают на плоскости X инволюцию порядка t.

Объединяя оба рассмотренные случая, получаем следующую теорему:

th:2.1.1 **Теорема 2.1.1.** *Пусть x_1, x_2, x_3 – однородные координаты точки x плоскости X, а x_1', x_2', x_3' – однородные координаты точки x' плоскости X'. Зададим между точками этих плоскостей соответствие, выраженное уравнениями*

$$\rho x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3)$$

где f_i – формы одного и того же порядка, свободные от общих множителей. Если формы f_i могут быть выражены как бинарные формы двух других форм $u(x_1, x_2, x_3)$ и $v(x_1, x_2, x_3)$,то при движении точки x в плоскости X соответствующая точка x' пробегает некоторую рациональную кривую в плоскости X'; если же формы f_i не имеют столь специального вида, то произвольной точке x соответствует одна и только одна точка x', а произвольной точке x' – некоторое конечное число t $(t \geq 1)$ точек плоскости X.

В последнем случае говорят, что между плоскостями X и X' установлено рациональное преобразование, поскольку неоднородные координаты x', y' точки плоскости X' выражаются как рациональные функции неоднородных координат x, y точки плоскости X:

$$x' = \frac{f_1(x, y, 1)}{f_3(x, y, 1)}, \quad y' = \frac{f_2(x, y, 1)}{f_3(x, y, 1)}. \tag{12}$$

И наоборот, очевидно, что каждое соответствие между плоскостями X и X', представимое уравнениями вида (12), может быть выражено и формулами вида (9), если перейти к однородным координатам. При этом следует иметь ввиду, что при использовании неоднородных координат не требуется, чтобы полиномы f_1, f_2, f_3 имели один и тот же порядок.

Как можно в неоднородных координатах выразить условие того, что точка x' пробегает всю плоскость X'? Пусть преобразование задано формулами

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y), \tag{13}$$

где φ и ψ – две рациональные функции, отличные от констант. Искомое условие можно выразить так: когда изменяют координаты x и y, между координатами x' и y' не имеется никакой связи, то есть выражения φ и ψ функционально независимы, то есть, иными словами, их функциональный определитель

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$$

не обращается в нуль тождественно. Поэтому *формула* (13) *задает рациональное преобразование плоскости* (x, y) *в плоскость* (x', y') *тогда и только тогда, когда* φ *и* ψ *– независимые рациональные функции.*

[В самом деле, если функциональный определитель в некоторой точке P отличен от нуля, то в силу известной теоремы Анализа[20] формулы (13) задают взаимно-однозначное отображение окрестностей точки P и ее образа, а значит, не могут переводить все точки плоскости в точки некоторой кривой. И наоборот, если этот определитель равен нулю тождественно, то (в предположении, что $\varphi_x \not\equiv 0$) после исключения из системы (13) переменной x получится уравнение, не содержащее и переменную y, скажем, $F(x', y') = 0$. Это и означает, что произвольная точка (x, y) переходит в точку, лежащую на рациональной кривой $F(x', y') = 0$.] [21]

n:15 **15. Фундаментальные точки и фундаментальные кривые.** Будем далее предполагать, что подвижная точка x' пробегает целиком плоскость X'. До сих пор мы исключали из рассмотрения случай, когда точки плоскости X совпадают с какой либо из базовых точек сети Σ, ограничившись тем замечанием, что точки, соответствующие базовым, остаются неопределенными. Теперь мы хотим исследовать природу этих исключительных точек; для понимания преобразований они имеют столь же важное значение, какое при изучении функций имеет знание их поведения в окрестности особых точек.

Вообразим подвижную точку x плоскости X, стремящуюся к базовой

[20] Э. Гурса. Анализ. I, n. 52.

[21] В оригинальном тексте вместо этого абзаца предложено след. объяснение. «Это условие эквивалентно найденному выше. В самом деле, если обе функции φ и ψ зависимы, то кривая $\varphi = \text{const.}$ совпадает с кривой $\psi = \text{const.}$ Но уравнение $\varphi = \text{const.}$ в силу (12) представляет некоторый пучок алгебраических кривых, поэтому кривые линейной системы Σ должны быть составлены из кривых этого пучка.» Против этого объяснения можно возразить след.: если две рациональные функции φ и ψ зависимы, то существует такая рациональная функция η, через которую обе эти функции можно выразить рационально:

$$\varphi(x, y) = f(\eta(x, y)), \quad \psi(x, y) = g(\eta(x, y));$$

поэтому кривые $\varphi = \text{const.}$ и $\psi = \text{const.}$ при надлежащем выборе константы совпадают, вообще говоря, не полностью, а лишь на одной из компонент $\eta = \text{const.}$ – Перев.

точке O по некоторой прямой или кривой. Каждому отличному от O положению точки x в системе Σ отвечает пучок кривых, проходящих через точку x; этому пучку в плоскости X' соответствует пучок прямых, проходящих через точку x', соответствующую точке x. Когда x непрерывно стремиться к точке O в некотором определенном направлении, точка x' стремится к некоторому предельному положению, именно к центру пучка прямых, соответствующего пучку кривых, имеющих в точке O в указанном направлении общую касательную. Поэтому можно сказать, что каждой точке x, бесконечно близкой к точке O, отвечает одна точка x' плоскости X; множество этих точек x' в общем случае является некоторой кривой Ω'. Можно еще заметить, что эта кривая рациональная; в самом деле ее точки однозначно соответствуют лучам, выпущенным из одной точки, а следовательно, и точкам прямой (№ 6). Точка O называется *фундаментальной точкой*, а кривая Ω' – *фундаментальной кривой* рассматриваемого соответствия.

Все сказанное можно без труда подтвердить аналитически. Воспользуемся однородными координатами и поместим точку $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1)$ в фундаментальную точку O. Если эта точка является для кривых сети Σ базовой точкой кратности s, то уравнения $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$, представляющие произвольную кривую сети, имеют вид:

$$f_j(x_1, x_2, x_3) = x_3^{n-s}\Theta_s^{(j)}(x_1, x_2) + x_3^{n-s-1}\Theta_{s+1}^{(j)}(x_1, x_2) + \cdots = 0; \quad (j = 1, 2, 3)$$

page:36 где n – порядок форм f_j, а Θ – бинарные формы, порядок которых указан нижним индексом.

Координаты подвижной точки x, лежащей на прямой, проходящей через точку O, имеют вид

$$x_1 = \lambda\xi_1, \quad x_2 = \lambda\xi_2, \quad x_3 = 1,$$

где ξ_1, ξ_2 – заданные константы, а λ – переменный параметр. При $\lambda = 0$ получается точка O.

Подставив эти значения в формулу (9), представляющую преобразование, получим:

$$\rho x'_j = \lambda^s \Theta_s^{(j)}(\xi_1, \xi_2) + \lambda^{s+1} \Theta_{s+1}^{(j)}(\xi_1, \xi_2) + \dots . \quad (j = 1, 2, 3)$$

Правые части этих трех равенств содержат общий множитель λ^s; сократив его, можно записать эти равенства в следующем виде:

$$\tau x'_j = \Theta_s^{(j)}(\xi_1, \xi_2) + \lambda \Theta_{s+1}^{(j)}(\xi_1, \xi_2) + \dots , \quad (j = 1, 2, 3)$$

где τ – коэффициент пропорциональности.

Когда λ непрерывно стремится к нулю, точка x' – к точке с координатами

$$\tau x'_j = \Theta_s^{(j)}(\xi_2, \xi_2). \tag{14}$$

eq:2.1:

Поворачивая прямую вокруг точки O, то есть меняя отношение $\xi_1 : \xi_2$, получим место точки x', соответствующее точкам x, бесконечно близким к O. Это место является кривой, причем уравнения (14) задают ее в параметрической форме, поэтому эта кривая является рациональной (см. №. 6). Из формулы (14) можно еще выяснить, при каких условиях не существует фундаментальная кривая, соответствующая точке O, то есть точки, соответствующие бесконечно близким к O, не распределены по не которой кривой, а лежат в окрестности некоторой точки O'. Это произойдет, если $\Theta_s^{(1)}(\xi_1, \xi_2), \Theta_s^{(2)}(\xi_1, \xi_2), \Theta_s^{(3)}(\xi_1, \xi_2)$ будут иметь постоянные (то есть от $\xi_1 : \xi_2$ независящие) отношения, то есть если формы $\Theta_s^{(1)}, \Theta_s^{(2)}, \Theta_s^{(3)}$ будут различаться лишь постоянными множителями. Однако, равенство

$$\Theta_s^{(j)}(x_1, x_2) = 0$$

представляет s касательных к кривой f_j в точке O; следовательно, в этом случае три кривые должны иметь s общих касательных, а, значит, и *все* кривые сети Σ имеют s неподвижных касательных в точке O. Итого:

В рациональном преобразовании точки, бесконечно близкие к фундаментальной точки плоскости (x_1, x_2, x_3), *будут соответствовать в* *плоскости (x'_1, x'_2, x'_3) точкам некоторой рациональной кривой; исключение доставляет только тот случай, когда кривые $f_j = 0$ имеют в фундаментальной точке одни и те же касательные, и тогда произвольной точке, бесконечно близкой к фундаментальной, отвечает неподвижная (fisso) точка плоскости (x'_1, x'_2, x'_3).*

Мы можем продолжить изыскания дальше и рассмотреть случай, когда кривые f_1, f_2, f_3 имеют в точке O одну или несколько общих касательных. Для точки x, стремящейся к точке O вдоль этой касательно, соответствующая точка a priori должна оставаться неопределенной, поскольку формы $\Theta_s^{(j)}$ должны обратиться в нуль одновременно; однако дальнейшее рассмотрение вопроса потребовало бы более точного анализа. Мы бы не хотели входить здесь в подробности, тем более, что природу этих дальнейших результатов можно предвидеть заранее.

С большей охотой мы хотим заметить, что *порядок* кривой Ω' может быть легко вычислен следующим способом. Произвольным образом заданной прямой плоскости X' соответствует на плоскости X кривая f системы Σ, а совместной точке прямой и кривой Ω' соответствует точка на кривой f, бесконечно близкая к O. Поскольку при изменении прямой также меняются и все ее пересечения с Ω', то точки, которые бесконечно блики к O и соответствуют пересечениям, при движении кривой f тоже будут меняться. Отсюда получается, что искомое число пересечений совпадает с числом подвижных касательных, которые можно провести к произвольной кривой сети Σ в точке O. Итого:

Порядок фундаментальной кривой равен числу подвижных касательных, которые можно провести к кривой сети Σ в соответствующей фундаментальной точке.

n:16 **16. Преобразования** Кремоны **между двумя плоскостями.** Предположим теперь, что рассмотренная выше сесть Σ является гомолоидной ($t = 1$; см. № 13). Тогда не только произвольной точке x плоскости X отвечает одна единственная точка x' плоскости X', но и произвольной точ-

ке этой последней – одна единственная точка первой плоскости, то есть
page:38 *рассматриваемое соответствие оказывается взаимно-однозначным.*

Пусть преобразование в неоднородных координатах задается формулами

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y), \tag{15}$$ eq:2.1:

где φ и ψ – две рациональные независимые функции. Придадим координатам x', y' произвольным образом выбранные значения, тогда согласно сделанному выше предположению уравнения (15) имеют одно и только одно решение, изменяющееся вмести с x', y'. Следовательно, x и y оказываются однозначными алгебраическими, то есть рациональными функциями переменных x' и y', то есть

$$x = \lambda(x', y'), \quad y = \mu(x', y'), \tag{16}$$ eq:2.1:

где λ и μ – независимые рациональные функции. Уравнения (16) позволяют перейти обратно от точек плоскости X' к точкам плоскости X, то есть представляют собой обращение операции, заданной уравнениями (15).

Соответствие между двумя плоскостями называют в этом случае *бирациональным*, поскольку координаты точек каждой из двух плоскостей могут быть выражены как рациональные функции координат соответствующих точек другой плоскости. Эти соответствия называют также преобразованиями Кремоны в честь Луиджи Кремоны, который первым рассмотрел их с общей точки зрения и отметил их важность для развития алгебраической геометрии.[22]

Если заданы формулы (15), то можно получить явное представление для функций λ и μ обычным путем при помощи рациональных операций исключения переменных. Именно, исключив переменную y из уравнений (15), получим как результат исключения уравнение относительно переменной x, коэффициенты которого зависят от x' и y' рационально; поскольку это уравнение должно иметь один единственный корень, меняющийся

[22]См. его мемуар «О геометрических преобразованиях плоских фигур», ч. I и II. 1863, 1865.

вмести с x', y', то из этого уравнения x можно выразить как рациональную функцию x' и y'. Аналогично, можно выразить и y как рациональную функцию x' и y'.

В случае преобразований Кремоны мы можем повторить все, сказанное относительно плоскости X, и для плоскости X'; таким образом, на этой последней плоскости имеется некоторая гомологическая сеть Σ', page:39 соответствующая прямым плоскости X, ее базовые точки образуют фундаментальные точки преобразования на плоскости X'.

Заметим теперь, что соответствие между кривыми

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$$

системы Σ и прямыми

$$\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0$$

плоскости X' можно зафиксировать, приняв за соответствующие такие кривую системы Σ и прямую плоскости X', которые соответствуют одним и тем же значениям параметров. Приняв эти параметры λ_i за однородные координаты кривой внутри сети Σ и за однородные координаты прямой плоскости X', можно выразить соответствие, потребовав равенство координат с одними и теми же индексами. Мы имеем особые тип линейных преобразований, при которых координаты кривой сети Σ совпадают с координатам соответствующей прямой плоскости X'. Соответствие между кривыми сети Σ и прямыми плоскости X' называют *проективным* (проективностью, projetivitta).

Как отмечалось выше в № 1, кривые некоторой линейной системы могут быть однозначно сопоставлены точкам линейного пространства, поэтому и без лишних ясно, что понимается под проективным соответствием между линейной системой и пространством той же размерности. .[23]

Так, напр., в интересующем нас случае имеется сеть Σ и система прямых на плоскости X', составляющая с сетью в таком соответствии, что *каждой*

[23]В нем. переводе рекомендуется относительно понятия проективного соответствия между двумя линейными пространствами заглянуть в сочинение: Bertini, Introdnzione и т.д. Стр. 46. – Перев.

кривой системы Σ соответствует *одна* прямая на плоскости X' и *каждой* прямой на X' – *одна* кривая системы Σ, причем выполняется еще дополнительное условие: когда прямая пробегает на плоскости X' произвольный пучок, соответствующая ей кривая в системе Σ пробегает пучок кривых.

При соблюдении этого последнего условия возникает цепочка взаимно-однозначных соответствий между 1) точкой плоскости X и пучком кривых гомолоидной системы Σ, имеющим помимо базовых точек системы именно эту точку в качестве базовой, 2) этим пучком и пучком прямых на плоскости X' и 3) этим пучком и точкой на плоскости X', являющейся его вершиной. *Сопоставляя дополнительную базовую точку пучка кривых системы Σ и вершину пучка прямых получим бирациональное преобразование между плоскостями X и X'.*[24] *Прямым второй плоскости на первой отвечает некоторая другая гомолоидная сеть.*

Преобразования Кремоны являются однозначными *в общем* (generalmante); исключения доставляют фундаментальные точки соответствия, то есть базовые точки гомологических сетей, имеющихся на обоих плоскостях.

Среди преобразований Кремоны следует выделить и такие, которые являются однозначными всюду, без каких либо исключительных точек. К таковым преобразованиям относятся, очевидно, *гомографические преобразования* или *коллинеации*. Можно доказать и обратное:

Преобразование Кремоны, *однозначное во всех точках без исключения, необходимо является коллинеацией.*

В самом деле, если две кривые f и g сети Σ, соответствующие двум произвольным образом выбранным прямым f' и g' плоскости X', имеют

[24]При нем прямые плоскости X' отвечают кривым системы Σ; аналитически его можно записать так

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3)$$

а стало быть, система Σ задается уравнением

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0$$

и т.д. – Перев.

помимо точки, соответствующей точке пересечения прямых f' и g', еще совместные (базовые) точки, то на плоскости X должна иметься точка, одновременно соответствующая некоторое точке на прямой f' и некоторой другой точке на прямой g', следовательно, на плоскости X имеется некоторое число точек, для которых соответствие не является взаимно-однозначным. Поэтому, если соответствие должно быть однозначным для всех точек без исключения, то сеть Σ не должна иметь базовых точек, то есть две произвольные ее кривые должны пересекаться только в одной единственной точке. Отсюда следует, что сеть Σ является системой всех прямых на плоскости X. Таким образом, заданное соответствие оказывается коллинеацией.

Последнее замечание может быть обобщено след. образом: *Кривые, соответствующие прямым обеих плоскостей, между которыми имеется бирациональное соответствие, имеют один и тот же порядок.* Пусть g – общая прямая на плоскости X, f' – общая прямая на плоскости X', а g' и f – соответствующие им кривые. Если кривая g' имеет порядок n, то она пересекается с прямой f' в n точках, которые меняются при изменении f'. Эти точки соответствуют точкам пересечения прямой g и кривой f, причем и эти точки пересечения меняются вмести с f. Отсюда следует, что кривая
page:41 f имеет тот же порядок, что и g'.

Общий порядок кривых g и f называют *порядком преобразования.*

n:17 **17. Квадратичные преобразования.** После гомографических преобразованиях (или преобразованиях первого порядка), переводящих прямые одной плоскости в прямые другой плоскости, простейшими являются преобразования Кремоны, переводящие произвольные прямые одной плоскости в конические сечения на другой плоскости, то есть преобразования второго порядка или *квадратичные преобразования.* Рассмотрим свойства этих преобразований более подробно.

Итак, пусть прямым плоскости X' соответствуют конические сечения некоторой гомолоидной сети Σ на плоскости X. Поскольку одно произвольное коническое сечение пересекает другое в четырех точках, то три из этих точек должны быть неподвижными, то есть сеть Σ образована всеми коническими сечениями, проходящими через три фиксированные точки.

Само собой разумеется, что не все из этих базовых точек системы Σ могут быть различными; сеть Σ может быть составлена из конических сечений, проходящих через две заданные точки и в одной из них имеющих заданную касательную, или из конических сечений, касающихся заданного конического сечения в заданной точке с кратностью три.

Аналогично, на плоскости X' имеется сеть конических сечений Σ', соответствующих прямым на плоскости X.

Выпишем теперь формулы, представляющие это преобразование.

Рассмотрим общий случай, когда сеть Σ имеет три отличные друг от друга базовые точки A_1, A_2, A_3. С тем, чтобы получить формулы в наиболее простом виде, примем точки A_1, A_2, A_3 плоскости X за вершины координатного треугольника, используемого для задания на этой плоскости однородных координат x_1, x_2, x_3.[25]

Уравнение произвольного конического сечения, описанного около треугольника $A_1A_2A_3$, то есть принадлежащего сети Σ, дается формулой

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3 x_1 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0,$$

то есть в качестве трех функций f_1, f_2, f_3, использованных выше при рассмотрении произвольного рационального преобразования, взяты теперь x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2. Поэтому само соответствие между плоскостями описывается формулами

$$\rho x_1' = x_2 x_3, \quad \rho x_2' = x_3 x_1, \quad \rho x_3' = x_1 x_2, \tag{17}$$

eq:2.1:

page:42 или, в более обозримом виде:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}$$

[25] Кремона, Introd., 36. – Перев.

Из (17) следует обращение

$$\sigma x_1 = x_2' x_3', \quad \sigma x_2 = x_3' x_1', \quad \sigma x_3 = x_1' x_2', \tag{18}$$

eq:2.1:

или

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{x_1'} : \frac{1}{x_2'} : \frac{1}{x_3'}$$

Уравнения (18) показывают, что прямой

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = 0$$

плоскости X соответствует на плоскости X' коническое сечение

$$\mu_1 x_2' x_3' + \mu_2 x_3' x_1' + \mu_3 x_1' x_2' = 0,$$

описанное около треугольника $A_1' A_2' A_3'$ с вершинами в точках $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Поэтому, если у сети Σ на плоскости X все три базисные точки различны, то тоже верно и для сети Σ' на плоскости X'.

В фундаментальной точке A_1 коническое сечение системы Σ имеет подвижную касательную, следовательно, точки, соответствующие точкам, бесконечно близким к точке A_1, заполняют *фундаментальную прямую* (см. №. 15). Легко видеть, что эта фундаментальная прямая совпадает с прямой $A_2' A_3'$. В самом деле, координаты подвижной точки постоянной прямой, проходящей через точку A_1, имеют вид

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \varepsilon \xi_2, \quad x_3 = \varepsilon \xi_3 \tag{19}$$

eq:2.1:

с переменным ε и постоянными ξ_2, ξ_3. Этой точке на плоскости X' отвечает точка с однородными координатами

$$\rho x_1' = \varepsilon^2 \xi_2 \xi_3, \quad \rho x_2' = \varepsilon \xi_3, \quad \rho x_3' = \varepsilon \xi_2,$$

или

$$\tau x_1' = \varepsilon \xi_2 \xi_3, \quad \tau x_2' = \xi_3, \quad \tau x_3' = \xi_2. \tag{20}$$

eq:2.1:

При $\varepsilon = 0$ мы получаем точку $(0, \xi_3, \xi_2)$, лежащую на прямой $x_1' = 0$, то есть на $A_2' A_3'$.

При этом, *прямой, проходящей через фундаментальную точку* A_1 *и в параметрической форме представленной в* (19)*, отвечает прямая, проходящая через фундаментальную точку* A'_1 *и представленная в параметрической форме в* (20).

page:43

Далее, *соответствие между лучами, проходящими через точку* A_1*, и точками прямой* $A'_2A'_3$ *является проективным*; в самом деле, произвольный луч, проходящий через точку A_1, определятся заданием отношения $\xi_2 : \xi_3$, а соответствующая ему точка на $A'_2A'_3$ – отношением $x'_2 : x'_3 = \xi_3 : \xi_2$.

Те точки бесконечно малой окрестности точки A_1, которые лежат на сторонах A_1A_2 и A_1A_3 координатного треугольника, имеют ξ_3 или ξ_2 равными нулю. Это означает, что *точке, бесконечно близкой к* A_1 *и лежащей в направлении* A_1A_2*, соответствует точка* $(0, 0, \xi_2)$*, то есть* A'_3*, а точке, бесконечно близкой к* A_1 *и лежащей в направлении* A_1A_3*, – точка* A'_2.

Относительно точек A_2 и A_3 можно повторить все сказанное выше, произведя циклическую перестановку индексов. Меняя ролями штрихованные и нештрихованные буквы, получим свойства фундаментальных точек A'_1, A'_2, A'_3 плоскости X'.

Рассмотрим теперь на плоскости X алгебраическую кривую C порядка n и зададимся целью определить порядок соответствующей ей кривой C'.[26]

Для большей общности будем предполагать, что кривая C проходит через фундаментальные точки A_1, A_2, A_3 с кратностями s_1, s_2, s_3. (В случае, когда C через одну из этих точек не проходит, примем соответствующее s равным нулю.)

Число точек пересечения кривой C' с подвижной прямой g' плоскости X' совпадает с число подвижных точек пересечения кривой C с коническим сечением g', соответствующим прямой g; но это число равно $2n - s_1 - s_2 - s_3$.

[26]Когда точка плоскости X пробегает кривую C, соответствующая ей точка плоскости X' пробегает некоторую кривую C', которую в тексте и называют соответствующей C. Кривая C' считается полной алгебраической кривой, поэтому к ее точкам могут быть причислены фундаментальные точки плоскости X', не имеющие прообразов на X. Если на кривой C лежит фундаментальная точка A_1, то ей не отвечает никакая точка на C', а соседней с ней точке отвечает некоторая точка, совместная кривой C' и прямой $A'_2A'_3$. – Перев.

Итого:

Кривая C на плоскости X, имеющая порядок n и проходящая через фундаментальную точку A_i с кратностью s_i $(i = 1, 2, 3)$ переходит на плоскости X' в кривую C' порядка $2n - s_1 - s_2 - s_3$.

Легко видеть, что *кривая C' проходит через фундаментальные точки A'_1, A'_2, A'_3 с кратностями $n - s_2 - s_3$, $n - s_3 - s_1$, $n - s_1 - s_2$.*

В самом деле, произвольная прямая g', проходящая через точку A'_1, пересекает кривую C' в точке A'_1 с кратностью, скажем, x, и еще в page:44 $2n - s_1 - s_2 - s_3 - x$ других точках. Прямой g' соответствует прямая g, проходящая через точку A_1, и каждой отличной от A'_1 совместной точке прямой g' и кривой C' соответствует одна из $n - s_1$ отличных от A_1 точек, в которых кривая C пересекает g; причем это утверждение допускает обращение. Итого:

$$2n - s_1 - s_2 - s_3 - x = n - s_1,$$

откуда

$$x = n - s_2 - s_3.$$

Аналогично можно провести доказательство для точек A'_2 и A'_3.

К тому же результату можно придти, если учесть, что кривая C пересекает фундаментальную прямую A_2A_3 в точке A_2 с кратностью s_2, в точке A_3 с кратностью s_3, и еще в $(n - s_2 - s_3)$ точках, которым соответствуют точки, бесконечно близкие к A'_1 и лежащие на кривой C'. Поэтому кривая C' имеет в A'_1 точку кратности $(n - s_2 - s_3)$, а ее касательные состоят в проективном соответствии с точками пересечения кривой C и прямой A_2A_3. При этом, конечно, среди $n - s_2 - s_3$ пересечений на A_2A_3 некоторые могут и совпадать. Итого:

Среди касательных в точке A'_1 к кривой C' имеется столько же совпадающих, сколько среди $n - s_2 - s_3$ точек пересечения кривой C с фундаментальной прямой A_2A_3, отличных от A_1 и A_2.

Если в частности прямая A_2A_3 и кривая C имеют в A_2 кратность пересечения, большую s_2, скажем, $s_2 + h$, то есть если прямая A_2A_3 является касательной к кривой C в точке A_2, то кривая C' касается фундаментальной прямой $A_1'A_3'$ и, более того, среди касательных к C' в точке A_1' эта прямая считается h раз.

Прибавим к сказанному еще несколько замечаний.

a) *Каждая точка P, которая не принадлежит фундаментальным прямым, но является точкой кратности s для кривой C, переходит в точку P', причем эта точка не лежит на фундаментальных прямых и является точкой кратности s для кривой C'.*

В самом деле, прямым, проходящим через точку P отвечают конические сечения сети Σ', проходящие через P'. Произвольная прямая g, проходящая page:45 через точку P, пересекает кривую C помимо P еще в $n-s$ точках, поэтому отвечающая этой прямой коника g' пересекает кривую C' в $n-s$ точках, отличных от P' и трех фундаментальных точек. В силу произвольности выбора коники g', три фундаментальные точки считаются в пересечении этой коники с кривой C' за

$$(n - s_2 - s_3) + (n - s_3 - s_1) + (n - s_1 - s_2) = 3n - 2s_1 - 2s_2 - 2s_3$$

точек; следовательно, точка P' считается за

$$2(2n - s_1 - s_2 - s_3) - (3n - 2s_1 - 2s_2 - 2s_3) - (n - s) = s$$

точек, что и тр. д.

b) *Если вышеназванная точка P является обыкновенной точкой кратности s[27] кривой C, то и точка P' является обычной точкой кратности s на кривой C'.*

В самом деле, две различные прямые, проходящие через точку P, переходят в две коники, проходящие через точку P', но не касающиеся в ней друг друга. Число коник, касающихся кривой C' в P', совпадает с числом различных касательных к кривой C в точке P. Отсюда следует, что кривая C' проходит через точку P' s дугами, причем эти дуги не касаются друг друга.

[27] Напомним, что под «обычной точкой кратности s на кривой» понимают такую точку кривой, все s касательных к которой различны. – Автор.

Установив это, рассмотрим какую-нибудь точку O кратности s на алгебраической кривой C порядка n, лежащей в плоскости π. Проведем через точку O две прямые, так, чтобы каждая из них пересекала кривую C помимо O еще в $n-s$ отличных друг от друга точках. На одной из этих прямых возьмем точку P, а на другой – точку Q так, чтобы кривая C пересекала прямую PQ в n точках, отличных друг от друга и от точек P и Q.

Зададим теперь проективное соответствие между кониками, проходящими через точки O, P и Q на плоскости π, и прямыми некоторой другой плоскости π', тем самым мы зададим квадратичное преобразование, для которого O, P и Q – фундаментальные точки на первой плоскости. Пусть O', P' и Q' – фундаментальные точки на плоскости π'. Поскольку точки P и Q выбраны произвольным образом, из предыдущих замечаний следует, что кривая C', отвечающая кривой C, имеет в точках P' и Q' обыкновенные точки, обе кратности $(n-s)$, и в точке O' – обыкновенную точку page:46 кратности n. Кроме того, каждой кратной точке M кривой C, не лежащей на фундаментальных прямых, отвечает точка M' кривой C', тоже не лежащая на фундаментальных прямых, имеющая ту же кратность и то же число отличных друг от друга касательных, что и точка M.

Мы оставим на будущее исследование действия преобразования на кратную точку O, которую мы взяли за фундаментальную точку. Пока же подытожим доказанное следующим образом:

При преобразовании кривой C в кривую C' сохраняются кратности точек, не лежащих на фундаментальных прямых; лежащие на фундаментальных прямых точки кривой C (отличные от O) вводят три обыкновенные кратные точки на C'.

Описанное квадратичное преобразование мы в дальнейшем будем кратко называть *общим* квадратичным преобразованием, имеющим фундаментальную точку в кратной точке O кривой C.

2.2 Разрешение особенностей плоской алгебраической кривой

page:46

n:18 **18. Разрешение особенностей плоской алгебраической кривой при помощи нескольких следующих друг за другом квадратичных преобразований. Бесконечно близкие особенности.** Рассмотрим опять на плоскости π алгебраическую кривую C порядка n и выясним, какое действие оказывает общее квадратичное преобразование, имеющее фундаментальную точку в s-кратной точке O кривой C, на саму эту точку. Как и в пред. пункте обозначим как P и Q – две другие фундаментальные точки преобразования, принадлежащие плоскости π, а как O', P', Q' – фундаментальные точки, лежащие в плоскости π' преобразованной кривой C'; тогда точки [бесконечно малой] окрестности O переходят в точки фундаментальной прямой $P'Q'$, точкам окрестности P – точки фундаментальной прямой $Q'O'$ и т.д.

Пусть $o_1, o_2, \ldots, o_l$ $(l \leq s)$ – отличные друг от друга касательные к кривой C в точке O. Этим прямым отвечают l точек $O'_1, O'_2, \ldots, O'_l$ на прямой $P'Q'$, различных между собой и не совпадающих с P' и Q'; поскольку касательные o_i и фундаментальные прямые OP и OQ являются различными page:47 лучами пучка прямых, проходящих через точку O, кривая C' пересекает фундаментальную прямую $P'Q'$ помимо Q' и P' еще и в отличных от них точках O'_i.

Разберем ситуацию подробнее. Если касательная o_i среди s касательных к кривой C в точке O считается τ_i раз, то есть если в уравнение степени s, доставляющем касательные к кривой C в точке O, соответствующий этой касательной корень имеет кратность τ_i и

$$\sum_{i=1}^{l} \tau_i = s,$$

то точка O'_i считается τ_i раз среди пересечений кривой C' с прямой $P'Q'$. Обозначим кратность точки O'_i относительно кривой C' как s_i, тогда верно

$$s_i \leq \tau_i,$$

[где неравенство реализуется всякий раз, как $P'Q'$ касается C'], откуда

$$\sum_{i=1}^{l} s_i \leq s.$$

Уже это неравенство имеет некоторое значение, поскольку оно указывает нам на следующее: *Если $l > 1$, то есть кривая C имеет в точке O хотя бы две различные касательные, то предложенное квадратичное преобразование разрешает точку O кратности s на несколько точек, кратность которых относительно преобразованной кривой C' строго меньше, чем s.*

Стало быть, при общих обстоятельствах предложенное *общее* квадратичное преобразование переводит кривую C в кривую C' таким образом, что кратности точек, не лежащих на фундаментальных прямых, не меняются, вводятся три *обыкновенные* кратные точки, а точка O заменяется или точкой той же кратности или несколькими точками меньшей кратности.

Далее, кривую C' можно преобразовать тем же способом, что и кривой C, применив общее квадратичное преобразование с фундаментальной точкой в O_i'. При этом точка O_i' заменится на одну или несколько точек $O_{i,1}'', O_{i,2}'', \ldots$ преобразованной кривой C'', и, если их имеется несколько, то кратность каждой из них строго меньше s_i. Обозначим кратности этих точек $O_{i,1}'', O_{i,2}'', \ldots$ относительно кривой C'' как $s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots$ и продолжим преобразовывать кривую дальше.

После ряда таких квадратичных преобразований получим кривую, связанную с первоначальной кривой C преобразованием Кремоны; это преобразование называют произведением указанных квадратичных преобразований. Оно позволяет заменить кратную точку на C на *несколько* точек меньшей кратности, но дополнительно вводит еще некоторое число *новых* кратных точек, но таких, все касательные в них различны.

К сказанному примыкает понятие об образовании кратной точки алгебраической кривой сложением *бесконечно близких особых точек*, эта связь была отмечена Максом Нетером[28].

[28] M. Noether. Math. Ann. **9**, 166 (1876) и особенно Math. Ann. **23**, 311 (1884).

Вернемся к первому квадратичному преобразованию, переводящему кривую C в C', а точку O в точки $O'_1, O'_2, \ldots, O'_l$. Повернем кривую C' на малый угол вокруг точки O' и обозначим получившуюся кривую как $\overline{C}'$, а кривую, соответствующую ей на плоскости π, – как $\overline{C}$. Кривая $\overline{C}$ имеет порядок $2(2n-s)-n=3n-2s$ и в точке O – *обыкновенную* точку кратности $(2n-s)$, поскольку кривая $\overline{C}'$ пересекает прямую $P'Q'$ в $2n-s$ простых, отличных друг от друга точках. Кроме того, кривая $\overline{C}'$ имеет две обыкновенные точки кратности $(n-s)$, находившиеся до поворота в точках P' и Q', и l точек с кратностями $s_1, s_2, \ldots, s_l$, находившихся до поворота в точках $O'_1, O'_2, \ldots, O'_l$. Этим последим соответствуют точки кривой $\overline{C}$, имеющие ту же кратность, что и относительно C'. Если теперь станем вращать кривую C' обратно, что кривая $\overline{C}$ разложится на прямые OP и OQ, каждая из которых считается $(n-s)$-раз, и первоначальную кривую C. Эта кривая опять имеет точку кратности s в точке O, к которой будут стремятся l точек кратностей $s_1, s_2, \ldots, s_l$. Подобного рода соображения могут быть повторены относительно кратной точки O'_i кривой C' и далее.[29]

Сказанное можно сформулировать в следующей форме, проясняющей взаимодействие кратных точек: *Кратная точка O составлена из одной точки кратности s, в окрестности первого порядка которой имеются точки O_i кратностей s_i $(i=1,2,\ldots l)$, в окрестности второго порядка – точки $O_{i,k}$ кратностей $s_{i,k}$ $(i,k=1,2,\ldots)$ и т.д.*

Следующие друг за другом квадратичные преобразования производятся именно с целью заменить окрестность первого порядка точки O точками фундаментальной прямой, окрестность второго порядка – окрестностями первого порядка точек этой прямой; конечное число этих последних окрестностей затем заменяется тем же числом прямых и так далее. Таким путем

[29]Текст этого абзаца дан в варианте, предложенном в немецком переводе. Севери вел дело к тому, что кривую C можно рассматривать как предельное положение подвижной кривой $\overline{C}$, а ее точку O кратности s – как предел l точек кратностей $s_1, s_2, \ldots, s_l$, полагая очевидной близость кривых $\overline{C}$ и C; подсчитав порядки кривых, Леффлер исправил текст, однако в этом новом варианте цель – интерпретация сложения кратной точки из цепочки бесконечно близких в конечном виде – при этом не была вполне достигнута. – Перев.

особенность, которая сложена из множества различных бесконечно близких особых точек, *развязывается* или *разрешается.*

Наделив бесконечно близкие особые точки геометрическим смыслом, неизбежно получаем, что *состав кратной точки не зависит от выбора следующих друг за другом квадратичных преобразований, разрешающих эту точку*, т.е. что числа $s, s_i, s_{i,k}, \ldots$ вполне однозначно определяются для рассматриваемой кратной точки.

Квадратичные преобразования играют в большей степени роль аналитического инструмента, чем существенного элемента при построении понятия составной особенности.

n:19 **19. Преобразование** КРЕМОНЫ**, переводящее одну кривую в другую, имеющую только обыкновенные кратные точки.**

Предположим, что рассматриваемая кривая C не имеет кратных составных частей. Остановится ли процесс, изложенный в пред. № для определения состава кратной точки O, за конечное число действий, то есть придем ли мы к окрестности достаточно высокого (но конечного) порядка, в которой имеются только простые точки C, или же этот процесс можно продолжать до бесконечности, постоянно наталкиваясь на все новые кратные точки?

Поскольку кратная точка, в которой можно провести хотя бы две различные касательные, разрешается в две или более точек меньшей кратности, сомнения может вызвать только случай кратной точки с одной единственной касательной. Мы хотим доказать, что в любом случае можно достигнуть простых точек за конечное число операций. Этому доказательству, однако, следует предпослать способ *вычисления кратности пересечения двух плоских кривых в точке пересечения.*

Пусть две кривые C и D пересекаются в точке O и пусть она имеет кратность s для C и t для D. Из элементарной теории плоских алгебраических кривых известно, что точка O поглощает (assorbire) или точно st пересечений кривых или большее их число. Первое случается, если эти page:50 кривые не имеют в точке O общих касательных; если же они имеют общие касательные в точке O, то происходит второе.[30]

Обозначим как J неизвестное число пересечений, тогда

$$J = st + J_1, \quad (J_1 \geq 0)$$

применим общее квадратичное преобразование с фундаментальной точкой в O. Пусть $O'_1, O'_2, \dots$ – точки фундаментальной прямой $P'Q'$, соответствующие общим касательным в O, а $J'_1, J'_2, \dots$ – кратности пересечений преобразованных кривых C' и D' в точках $O'_1, O'_2, \dots$.

Если заменить кривую C на достаточно близкую кривую $\overline{C}$, все еще имеющую в точке O точку кратности s, но не касающуюся более кривой D, то точка O поглотит точно st пересечений кривых $\overline{C}$ и D, а кроме того будут иметься еще J_1 точек, совместных кривым $\overline{C}$ и D, и стремящихся к O при стремлении $\overline{C}$ к ее прежнему положению C.

После преобразований кривая $\overline{C}$ перейдет в кривую $\overline{C}'$, сколь угодно близкую к C'; эта кривая пересекает D' в J'_1 точках, сколь угодно близких к O'_1, в J'_2 точках, сколь угодно близких к O'_2 и т.д., то есть она пересекает D' в $J'_1 + J'_2 + \dots$ точках, лежащих сколь угодно близко к фундаментальной прямой $P'Q'$, но удаленных на конечное расстояние от фундаментальных точек P' и Q'. Среди этих точек, конечно, могут быть и кратные пересечения. Поскольку этим точкам пересечения кривой $\overline{C}'$ с кривой D' отвечает J_1 пересечений кривой $\overline{C}$ с D, бесконечно близких к точке O, то

$$J_1 = J'_1 + J'_2 + \dots.$$

Рассмотрев подобным образом каждую из точек O'_i, совместных кривым C' и D', получим

$$J'_i = s_i t_i + \sum_k J''_{i,k},$$

где s_i и t_i – кратности точки O'_i соответственно для кривой C' и кривой D', а $J''_{i,k}$ – кратность пересечений кривых C'' и D'' в точке $O''_{i,k}$; под C'' и

[30]В немецком переводе в связи с этим предлагают заглянуть нас стр. 44 указанной выше статье Сегре.– Перев.

D'' мы подразумеваем те кривые, в которые переходят C' и D' при общем квадратичном преобразовании с фундаментальной точкой в O'_i.

Продолжая двигаться в том же направлении, получим *фундаменталь-*
page:51 *ную формулу* Нетера

$$J = st + \sum_i s_i t_i + \sum_{i,k} s_{i,k} t_{i,k} + \dots ;$$

где первая сумма распространяется на все совместные точки кривых C и D, лежащие в окрестности первого порядка малости точки O, вторая сумма – на все совместные точки, лежащие в окрестности второго порядка, и т.д.

Вернемся теперь к вопросу, поставленному в начале этого №.[31]

Рассмотрим общую точку P плоскости π, в которой лежит кривая C, и первую поляру Γ для точки P относительно кривой C. Изучим поведение поляры Γ в кратной точке O кривой C. С этой целью возьмем другую общую точку Q на π и преобразуем плоскость π в плоскость π' посредством квадратичного преобразования с фундаментальными точками O, P, Q на π и O', P', Q' на π'. Лучу, проходящему через точку P на плоскости π, на π' отвечает луч, проходящий через точку P', а ряды точек на двух таких гомологичных прямых проективны (в силу бирациональности соответствия). Отсюда следует, что получающаяся при преобразовании из кривой Γ кривая Γ' является первой полярой для точки P'относительно кривой C', соответствующей заданной кривой C. Кривая Γ содержит точку O с кратностью $s-1$, а кривая Γ' проходит с кратностями, которые можно оценить снизу как $s_1 - 1, s_2 - 1, \dots$, через точки $O'_1, O'_2, \dots$, соответствующим кратным точкам кривой C, лежащими в окрестности первого порядка кратной точки O. Это утверждение можно еще сформулировать следующим образом: кривая Γ проходит через точку O с кратностью $s-1$ и через s_i-кратные точки O_i, бесконечно близкие к точке O, как минимум

[31] Следующие два абзаца даны по немецкому изданию, в итальянском оригинале автор вместо поляры использует непрерывную деформацию исходной кривой, полагая очевидным, что она проходит через кратные точки, в т.ч. бесконечно близкие с кратностями, на единицу меньшими чем C. – Перев.

с кратностями $s_i - 1$.

Выполним теперь второе общее квадратичное преобразование, имеющее в точке O'_i одну фундаментальную точку, в точке P' – другую. Кривая Γ' при этом перейдет в кривую Γ'', являющуюся первой полярой относительно кривой C'', получающейся из кривой C', для фундаментальной точки P''; поэтому Γ'' проходит как минимум с кратностями $s_{i,k} - 1$ через точки $O''_{i,k}$, соответствующие кратным точкам кривой C', лежащим в окрестности первого порядка точки O'_i. Продолжая так дальше получим следующую теорему:

Первая поляра для произвольной точки относительно кривой C проходит через s-кратную точку O с кратностью $s-1$, а через следующие друг за другом кратные точки $O_i, O_{i,k}, \ldots$ как минимум с кратностями
page:52 $s_i - 1, s_{i,k} - 1, \ldots$.

Учитывая то обстоятельство, что кривая C и ее поляра Γ не имеют общих составных частей, коль скоро мы предполагаем, что сама кривая C не имеет кратных составных частей, то получается, что общая кривым C и Γ точка O поглощает из $n(n-1)$ пересечений этих двух кривых как минимум

$$s(s-1) + \sum s_i(s_i - 1) + \sum s_{i,k}(s_{i,k} - 1) + \ldots$$

точек. Значит, эта последняя сумма должна быть конечной, и поэтому все слагаемые, начиная с некоторого номера, должны обращаться в нуль, то есть *существует окрестность кратной точки O кривой C, не имеющей кратных составных частей, столь большого, но конечного порядка, в которой имеются только лишь простые точки ($s_{i,k,l,\ldots} = 1$).*

Отсюда следует, что при помощи *конечного* числа квадратичных преобразований, то есть при помощи некоторого преобразования Кремоны можно разрешить какую угодно кратную точку кривой C (если, конечно, сама эта кривая не имеет кратных компонент).

Если теперь вспомнить, что ни при каком квадратичном преобразовании, которые следует произвести, чтобы разрешить заданную особую точку, не вводятся новые необыкновенные особые точки на преобразованной кривой, то, стало быть, можно при помощи конечного числа квадратичных преобразований все высшие особые точки разрешить и получить в итоге кривую, во всех кратных точках которой все касательные различны. Итого:

th:Noether **Теорема 2.2.1** (Макса Нетера)**.** *Любая кривая с какими угодно особыми точками при помощи надлежащим образом подобранного преобразования* Кремоны *может быть сведена к другой плоской кривой, имеющей только обыкновенные кратные точки (то есть такие кратные точки, все касательные в которых различны).*

2.3 Ветви алгебраической кривой

Art:2:3

n:20 **20. Ветви или циклы плоской алгебраической кривой.** Пусть O – произвольная кратная точка плоской алгебраической кривой C, у которой нет кратных компонент. Применим преобразование Кремоны, при котом кривая C переходит в кривую Γ порядка m, а кратная точка O разрешает-
page:53 ся в некоторое число l простых точек $P, Q, \dots$ трансформированной кривой. Множеству точек кривой C, лежащих в бесконечно малой окрестности точки O (т.е. для которых абсолютное значение расстояния до O остается меньше любой заданной границы[32]), отвечают окрестности простых точек $P, Q, \dots$ на кривой Γ. Точки каждой из этих областей образуют, как говорят, *ветвь* (ramo, по Кели[33]) или *цикл* (ciclo, по Альфену[34]) рассматриваемой кривой; точки $P, Q, \dots$ мы будем называть *началами* (origini) соответствующих ветвей. Чтобы напомнить о том, что окрестность точки O на C может быть разрешена в l окрестностей простых точек на надлежащим образом выбранной и с C бирационально эквивалентной кривой, говорят, что *точка O на C является началом l ветвей.*

[32]На след. стр. Севери дает аналитическое определение ветви, в котором, конечно, речь идет о достаточно малых, но конечных окрестностях рассматриваемых точек. – Перев.

[33]Cayley, Quart. J. **7**, 212 (1866) и Papers **5**, 620: реферат имеется в Journ. f. Math. **64**, 369 (1865).

[34]Halphen, Paris Sav. étr. (2) **26** (1877); реферат имеется в C. R. **78**, 1105 (1874).

Каждая такая ветвь кривой C определена вполне однозначно: множество ее точек отвечает именно тем точкам кривой Γ, которые лежат в окрестности простых точек P, $Q, \ldots$.

Представление о ветви вводится как как понятие, остающееся инвариантным при бирациональных преобразованиях, то есть:

При бирациональном преобразовании ветвъ всегда переходит опятъ в ветвъ.

Определение ветви тесно связано со следующим аналитическим построением.

Пусть t, u – декартовы координаты точки кривой Γ, а $f(t,u) = 0$ – уравнение этой кривой.

Мы можем выбрать координатные оси так, чтобы начало координат $t = u = 0$ совпало с названной выше простой точкой P, и чтобы кроме того, ось $t = 0$ не касалась бы кривой Γ, а пересекала ее в m точках, лежащих в конечной области и отличных друг от друга. Тогда уравнение

$$f(0,u) = 0,$$

скажем степени m, по предположение имеет m различных корней, одним из которых является $u = 0$.

Представим себе на манер Гаусса и Аргана, что переменная t меняется в комплексной плоскости (которую для краткости будем называть t-плоскостью), отметим на этой плоскости точку $t = 0$. Аналогично, пред-
page:54 ставим себе значения переменной u как точки на другой плоскости (u-плоскости) и отметим на ней точку $u = 0$. Равенство $f(t,u) = 0$ задает между точками этих плоскостей такое соответствие, что каждой точке t отвечают m точек u (которые могут быть различны, а могут и совпадать). Точке $t = 0$ отвечают *m отличных друг от друга* точек u, среди которых имеется и точка $u = 0$. Далее, отметим на t-плоскости *критические точки* неявной функции u от t, заданной уравнением $f = 0$, то есть те значения t, которым отвечают два или более совпадающих значений u. Поскольку по предположению кривая C, а следовательно, и кривая Γ не имеет

кратных составных частей, то таких точек может иметься лишь конечное число, коль скоро им отвечают такие значения t, при которых кривая Γ имеет кратную точку или касательную, параллельную оси u (или иными словами такие значения t, при которых совместны уравнения $f(t,u) = 0$ и $f'_u(t,u) = 0$). Отметим, наконец, на t-плоскости точки, которым отвечают бесконечно большие значения u (*полюса* функции u); очевидно, что и этих точек имеется лишь конечное число.

Все эти точки отличны от $t = 0$, поскольку по предположению точке $t = 0$ отвечает m конечных и различных значений u; поэтому на t-плоскости можно провести круг A достаточно малого радиуса, такой, что все выше перечисленные особые точки лежат вне него. Пусть

$$u_0 = 0,\, u_1,\, u_2,\, u_3, \ldots, u_{m-1}$$

– m значений переменной u, соответствующие точке $t = 0$. Когда точка t-плоскости движется внутри этого круга, соответствующие ей m точек u-плоскости двигаются, описывая некоторые конечные плоские области $A_0,\, A_1, \ldots, A_{m-1}$, окружающие точки $u_0,\, u_1, \ldots, u_{m-1}$. Когда уменьшается радиус круга A, уменьшаются и области $A_0,\, A_1, \ldots, A_{m-1}$, причем когда радиус A стремится к нулю, они стремятся соответственно к точкам $u_0,\, u_1, \ldots, u_{m-1}$. Это позволят выбрать A столь малым (но все еще конечным), чтобы области $A_0,\, A_1, \ldots, A_{m-1}$ не пересекались. В этом случае точки круга A будут состоять во *взаимно однозначном* соответствии с точками областей A_i $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$. В частности отображение области A на A_0 можно рассматривать как однозначную и конечную функцию $u(t)$.

page:55 Эта функция удовлетворяет всем условиям, которыми характеризуют *аналитические функции*.[35] Именно, подставим в уравнение $f = 0$ на место u функцию $u(t)$ и вспомним, что функция f имеет производные по t и по u и что $f'_u(t, u(t))$ при t, лежащих в круге A, не обращается в нуль, поэтому по правилу дифференцирования неявной функции получается, что

[35]См., напр., L. Bianchi, Lezioni sulla teoria delie funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche (Pisa 1901), § 2. – Автор.

$\frac{du}{dt}$ существует и дается формулой

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial u}}.$$

Это выражение для $\frac{du}{dt}$ показывает, что производная является непрерывной функцией, принимающей в каждой точке круга A значение, не зависящее от направления, то есть что $u(t)$ является аналитической функцией. Это позволяет разложить эту функцию в ряд Тейлора

$$u = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots,$$

сходящийся внутри круга A.[36]

Присоединяя к каждому значению t, лежащему внутри круга A, соответствующее значение u, которое получается из этого ряда, получим последовательность точек (u, t) кривой Γ, составляющую множество, называемое *ветвью* (ramo), началом которой является простая точка P.

Пусть x, y – координаты подвижной точки изначально заданной кривой C. Тогда мы имеем следующее представление:

$$\begin{cases} x = \text{рац. функция } (t, u), \\ y = \text{рац. функция } (t, u), \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \text{рац. функция } (x, y), \\ u = \text{рац. функция } (x, y); \end{cases}$$

где (x, y) и (t, u) – координаты соответствующих друг другу точек бира-
page:56 ционально эквивалентных кривых C и F. Подставляя вместо u степенной ряд и выполняя арифметические операции, указанные в функциях, при помощи которых выражаются x и y, получим разложения

$$x = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots, \quad y = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots;$$

они представляют *ветвь* кривой C, началом которой служит кратная точка O; эта ветвь отвечает той ветви кривой Γ, началом которой служит простая точка P. Итого:

Точки алгебраической кривой, принадлежащие [некоторой достаточно малой] окрестности ее точки O, делятся на конечное число ветвей, име-

[36] См. Bianchi, *ук. соч.* § 43. – Автор.

ющих началом точку O. Координаты точек этих ветвей можно представить рядами по целым положительным степеням некоторого параметра t, который сам можно выразить как рациональную функцию координат. Меняя параметр t внутри круга сходимости такого ряда, получим все точки ветви.

Определи теперь два числа, которыми будем в дальнейшем характеризовать ветвь плоской алгебраической кривой C: ее *порядок* и ее *класс.*

Примем начало O ветви за начало декартовой системы координат, тогда в разложениях по степеням t будет отсутствовать нулевой член, то есть

$$x = a_\alpha t^\alpha + a_{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \dots,$$
$$y = b_\alpha t^\alpha + b_{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \dots,$$

где хотя бы одна из констант a_α и b_α отлична от нуля.

Уравнение $\lambda x + \mu y = 0$ описывает прямую, проходящую через начало O. Подставляя в это уравнение степенные ряды, представляющие ветвь кривой, получим

$$\varphi(t) = (\lambda a_\alpha + \mu b_\alpha) t^\alpha + (\lambda a_{\alpha+1} + \mu b_{\alpha+1}) t^{\alpha+1} + \dots = 0.$$

Если J ($\geq \alpha$) – наименьшая степень t, присутствующая в левой части, то говорят, что *ветвь и прямая имеют в начале кратность пересечения, равную J.*

Если прямая проведена через точку O не особенным образом, то есть если

$$\lambda a_\alpha + \mu b_\alpha \neq 0,$$

page:57 то, очевидно, $J = \alpha$; для особой же прямой

$$b_\alpha x - a_\alpha y = 0$$

число J больше α. Эта кривая называется касательной к ветви, проведенной в ее начале.

Если кратность пересечения касательной и кривой равна $\alpha + \alpha_1$ (где $\alpha_1 \geq 1$), то число α называют *порядком*, а α_1 – *классом* ветви.

Оба эти числа имеют очевидный геометрический смысл, придающий им проективный характер.

Разыщем сначала геометрический смысл понятия «кратность пересечения» ветви с произвольным образом заданной прямой, проходящей через начало ветви. Рассмотрим прямую

$$\lambda x + \mu y + \varepsilon = 0,$$

которая при достаточно малом ε подходит к прямой

$$\lambda x + \mu y = 0$$

сколь угодно близко. Подставив в уравнение новой прямой степенные ряды для x и y, получим

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon + \varphi(t) = 0.$$

Поскольку уравнение $\varphi(t, \varepsilon) = 0$ имеет при $\varepsilon = 0$ имеет J корней $t = 0$ (точнее говоря, функция $\varphi(t, 0)$ относительно t является бесконечно малой порядка J), то уравнение $\varphi(t, \varepsilon) = 0$, при достаточно малом значении ε, имеет J различных корней вблизи нуля.[37] Геометрически это означает, что *прямая $\lambda x + \mu y + \varepsilon = 0$ пересекает ветвь в J различных точках*, сколь угодно близких к началу ветви (в том смысле, что все эти точки стремятся к началу при неограниченном убывании ε).

Под *порядком ветви* мы, стало быть, понимаем *число различных точек, в которых эту ветвь пересекает прямая, расстояние от которой до начала ветви не превосходит некоторую достаточно малую границу, а направление которой отлично от направления касательной к ветви.* Если же определить*число различных точек пересечения ветви с прямой, составляющей с касательной угол, не превышающий некоторой границы, и расстояние до которой от начала ветви опять же является произвольно малой заданной величиной, не превосходит некоторой величины* и
page:58 вычесть из этого числа порядок, то получится *класс ветви.*

[37] См. Bianchi, *ук. соч.* § 73. – Автор.

Можно доказать, что *класс может быть определен как число, двойственное порядку.* Для этого рассмотрим ветвь не как множество ее точек, а как оболочку касательных к кривой в точках ветви, тогда класс ветви – ни что иное, как число различных касательных, которые можно провести из очень близкой к началу точки к ветви.[38][39]

n:21 **21. Применение предложенных выше понятий к классификации двойных точек плоской кривой.** Приведем пример применения общих утверждений, доказанных выше относительно понятия бесконечно близких кратных точек и понятия ветви, рассмотрев двойную точку алгебраической кривой.

Двойная точка O алгебраической кривой C может иметь две различные или совпадающие касательные. В первом случае, точка O при общем квадратичном преобразовании, для которого точка O является фундаментальной, разрешается в *две простые точки* преобразованной кривой; в этом случае точку O называют *обыкновенной двойной точкой* или *узлом* (nodo). Таким образом, узел имеет две бесконечно близкие простые точки в своей окрестности первого порядка.

Во втором случае при помощи общего квадратичного преобразования с фундаментальной точкой O эта точка может быть переведена в одну простую или двойную точку O_1'. Если O переходит в простую точку на преобразованной кривой, то есть во всей окрестности первого порядка точки O имеется одна единственная простая точка, то такую двойную точку называют *точкой возврата первого рода* (cuspide). Если преобразованная кривая имеет в O_1' двойную точку и эта точка является узлом, то двойную точку O называют *точкой самокасания* (tacnodo) или *узлом второго рода.* Таким образом, точка самокасания составлена из двойной точки, в окрестности первого порядка которой лежит другая двойная точка, и поэтому в

[38]См., напр., Дополнение об алгебраических кривых и их особенностях в сочинении Бертини (Bertini), Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi (Pisa 1907), S. 365. – Автор.

[39]В немецком переводе добавлено, что сделанное выше замечание принадлежит Кели (A. Cayley), Journ. f. Math. **64**, 369 (1865); его доказательство дано Альфеном (G. Halphen), Paris Sav. étr. (2) **26** (1877) и Штольцем (O. Stolz), Math. Ann. **8**, 441 (1875). – Перев.

Рис. 2: к § 21. fig:2

page:59 ее окрестности второго порядка имеются две простые точки. Если же O_1' – точка возврата первого рода, то точку O называют *точкой возврата второго рода*. Таким образом, в окрестности первого порядка точки возврата 2-го рода лежит точка возврата 1-го рода, и поэтому в ее окрестности второго порядка имеется одна простая точка. На рис. 2 изображено поведение алгебраической кривой вблизи узлов и точек возврата 1 и 2 рода.

Более обще, под *узлом k-го рода* понимают двойную точку, в окрестности 1-го порядка которой имеется одна двойная точка, в окрестности 2-го порядка – еще одна одна двойная точка, ..., в окрестности $(k-1)$-го порядка – опять двойная точка и в окрестности k-го порядка – *две простые, бесконечно близкие точки.* Под *точкой возврата k-го порядка* понимают двойную точку, в окрестности 1-го порядка которой имеется одна двойная точка, в окрестности 2-го порядка – еще одна одна двойная точка, ..., а в окрестности $(k-1)$-го порядка – точка возврата 1-го порядка и поэтому в окрестности k-го порядка – *одна простые точка.*

С точки зрения теории ветвей, узел любого порядка служит началом двух ветвей, а точка возврата любого порядка – началом только одной единственной. Иными словами, чтобы полностью представить множество точек, принадлежащих окрестности начала, требуется две различные пары степенных рядов, а в случае точки возврата вполне достаточно одной пары.

Что же касается значений порядка и класса ветвей[40], из которых состав-

[40]См., напр., Plücker, Theorie der algebraischen Curven (Bonn 1839), S. 200; Stolz, Math. Ann. **8**, 433 (1876); St. Smith, London Proc. Math. Soc. **6**, 163 (с 1873 по 1876).

ляются двойные точки узлы различных родов, то можно доказать, что *узлы любого рода дают начало двум ветвям первого порядка*, так как прямая, page:60 проходящая к двойной точке достаточно близко, должна пересечь каждую из двух ветвей и, следовательно, всего кривую в *двух точках*, лежащих вблизи двойной точки. Класс каждой из этих ветвей может быть произвольным, но принимает в общем случае значение 1.

Относительно точки возврата можно утверждать, что *она служит началом одной ветви второго порядка*; в самом деле, прямая, проведенная достаточна близко к точке возврата, пересекает кривую в двух точках, лежащих сколь угодно близко к точке возврата, поэтому обе эти точки должны лежать на единственной ветви, началом которой служит точка возврата. – Класс этой ветви равен 1, если речь идет о *точки возврата 1-го рода.*

3 Линейные семейства групп точек на алгебраической кривой

3.1 Определения и основные свойства

n:22 **22. Однократно бесконечные семейства.** Пусть на плоскости задана неприводимая алгебраическая кривая

$$f(x, y) = 0 \tag{21}$$ eq:3:1:

и пучок алгебраических кривых

$$\varphi(x, y) - \lambda\psi(x, y) = 0 \tag{22}$$ eq:3:1:

Если подвижная кривая C этого пучка пересекает кривую f в подвижных точках, то есть если среди пересечений кривых f и C имеются точки, отличные от базовых точек пучка, то говорят, что группа точек пересечения этих двух кривых пробегает на f *линейное* ∞^1*-семейство* (serie) или *семейство размерности* 1. Это название вполне оправдано тем, что семейство названных групп является многообразием (totalita) первого порядка, так как эти группы состоят во взаимно однозначном соответствии с кривыми пучка, то есть со значением параметра λ.

Если среди точек пересечения подвижной кривой C с кривой f имеются неподвижные точки, то мы вправе как добавить эти точки в группы линейного семейства, так и удалить их оттуда, поскольку они не оказывают никакого влияния на наше изыскание, если исключить из рассмотрения некоторые весьма специальные вопросы. В этих случаях мы будем каждый раз указывать, идет ли речь о линейных семействах с неподвижными точками или, напротив, семействах, все точки которых подвижны.

Число точек группы называют *порядком* линейного семейства. Если n – порядок, то вслед за Бриллем (Brill) и Нетером (Noether) семейство обозначают символом g^1_n, где нижний индекс показывает порядок, а верхний
page:62 – размерность семейства.

Линейное семейство g^1_n обладает следующими свойствами:

a) *Их группы образуют рациональное многообразие*, поскольку они состоят в бирациональном соответствии со значениями параметра (именно, того параметра, при помощи которого выделяются кривые в пучке, задающем линейное семейство).

b) *Через общую точку кривой f проходит одна единственная группа семейства.* В самом деле, пусть задана точка (x_0, y_0) на f, тогда группа семейства g^1_n, которая должна проходить через заданную точку, будет лежать на той кривой C, которой отвечает значение параметра λ, удовлетворяющее уравнению

$$\varphi(x_0, y_0) - \lambda\psi(x_0, y_0) = 0;$$

что полностью определяет кривую C, если одновременно не верно

$$\varphi(x_0, y_0) = \psi(x_0, y_0) = 0,$$

то есть если (x_0, y_0) не совпадает с базовыми точками пучка (или, если угодно, неподвижными точками семейства g^1_n).

Важно заметить, что свойства a) и b) являются характеристическими для g_n^1: *если* ∞^1*-семейства групп, образованных n точками кривой, удовлетворяет условиям* a) *и* b), *то оно неизбежно является линейным.*

Условие a) дает нам, что отдельные группы заданного семейства можно определять путем задания значения некоторого параметра λ так, чтобы между группами и значениями параметра λ имелось бы бирациональное соответствие. Условие b) утверждает, что общей точке кривой f отвечает одно единственное значение λ; поэтому λ является однозначной алгебраической, то есть рациональной функцией точки, меняющейся на кривой f (см. Введение, **??**). Таким образом, мы можем записать

$$\lambda = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

рациональная функция $\frac{\varphi}{\psi}$ принимает во всех точках, принадлежащих одной и той же группе, одно и то же значение λ. Отсюда следует, что, за вычетом неподвижных точек, рассматриваемая группа вырезается на кривой f кривой, принадлежащей пучку

$$\varphi(x, y) - \lambda\psi(x, y) = 0.$$

page:63

В неподвижных точек линейного семейства рациональная функция $\frac{\varphi}{\psi}$ не определена, поскольку ее числитель и знаменатель обращаются в нуль. Если исключить из семейства эти неподвижные точки, то получится, что точки группы семейства g_n^1 – суть точки, в которых эта рациональная функция принимает одно и то же значение. Короче говоря, *группы* ∞^1*-линейного семейства – это группы постоянного уровня для некоторой рациональной функции точки той кривой* f*, на которой задается линейное семейство.*

Отсюда следует, что *понятие линейного семейства групп точек инвариантно относительно бирациональных преобразований кривой*; то есть если кривая $f(x, y) = 0$ переходит в кривую $F(X, Y) = 0$ посредством преобразования, при котором координаты подвижной точки кривой f являются рациональными функциями соответствующей точки кривой F и наоборот, то *линейное* семейство g_n^1 групп точек, принадлежащих кривой f, переходит в линейное семейство g_n^1 *того же порядка*, принадлежащее кривой F.

В самом деле, семейство g_n^1 на f задается как группы точек постоянного уровня некоторой рациональной функции $R(x,y)$; если заменить в этой последней переменные x,y на рациональные функции X,Y, при помощи которых задается бирациональное преобразование, то функция $R(x,y)$ перейдет в рациональную функцию $S(X,Y)$. Если (x,y) и (X,Y) – координаты двух соответствующих точек кривых f и F, верно

$$R(x,y) = S(X,Y),$$

и, следовательно, точкам заданной группы постоянного уровня одной из этих функций отвечают точки того же уровня другой функции. Линейное семейство, соответствующее одной их этих функции, переходит в линейное семейство, соответствующее другой, причем соответствие не только между группами, но и между точками групп взаимно однозначное. Отсюда следует, что эти оба семейства имеют один и тот же порядок.

Инвариантность линейного семейства относительно бирациональных преобразований можно усмотреть так же из из того обстоятельства, что при переходе от f к F семейство групп n точек, удовлетворяющих условиям a) и b), переходит в семейство групп n точек, опять удовлетворяющее этим условиям.

n:23 **23. Линейные семейства произвольной размерности.** Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда множество точек на кривой $f(x,y) = 0$ строиться путем пересечения с кривыми линейной системы Σ

$$\lambda_0\varphi_0(x,y) + \lambda_1\varphi_1(x,y) + \cdots + \lambda_R\varphi_R(x,y) = 0.$$

page:64 Будем предполагать, что не все кривые системы Σ содержат кривую f как составную часть, и что среди точек пересечения кривой f с подвижной кривой C системы Σ имеется несколько подвижных. Неподвижные точки, если таковые имеются, мы можем как причислять в качестве составной части к рассматриваемым группам точек, так и не причислять. Множество этих групп точек называют *линейным семейством порядка* n, если n – число точек, составляющих произвольную группу.

Если r – *размерность* семейства, то есть число независимых параметров, полностью определяющих группу точек в семействе, то само семейство обозначают символом g_n^r.

Очевидно, что r не может быть больше размерности R системы Σ, задающей семейство, однако оно может оказаться меньше этого числа.

Равенство $r = R$ имеет место только тогда, когда через каждую группу семейства можно провести *одну и только одну* кривую системы Σ, поскольку только в этом случае между группами семейства g_n^r и кривыми системы Σ имеется взаимно однозначное соответствие.

Что же случиться, если через группу семейства g_n^r на f проходят две кривые линейной системы? Если, напр., через группу G_n на f (в которую мы не включаем сейчас неподвижные точки) проходят две различные кривые

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi' = 0$$

системы Σ, то точки группы G_n являются базисными точками пучка

$$\varphi + \lambda\varphi' = 0,$$

и, следовательно, кривая f пересекает все кривые этого пучка (принадлежащего системе Σ) по одной и той же группе G_n. Но тогда среди этих кривых найдется *одна*, содержащая кривую f в качестве составной части.

В самом деле, общая кривая этого пучка пересекает кривую f в базовых точках системы Σ, которые мы исключили из групп семейства g_n^r, и, кроме того, еще в точках группы G_n. Так как этими точками исчерпывается множество точек пересечения кривой f с подвижной кривой $\varphi + \lambda\varphi' = 0$, то имеется кривая пучка, проходящая еще через некоторую другую точку кривой f, то есть имеющая с кривой f больше точек пересечения, чем разрешает теорема Безу; поэтому неприводимая кривая f должна входить в эту кривую составной частью.

page:65

И наоборот, если в системе Σ имеется кривая $\varphi = 0$, содержащая кривую f в качестве составной части, то через группу G_n семейства можно провести бесконечное число кривых Σ.

В самом деле, пусть $\varphi' = 0$ – кривая системы Σ, пересекающая кривую f по группе G_n, тогда любая кривая пучка $\varphi + \lambda\varphi' = 0$ пересекает f по этой группе, а точки G_n является базовыми точками этого пучка. Заметим, что в рассматриваемом пучке нельзя найти еще одну, отличную от φ кривую, содержащую f в качестве составной части; в самом деле, в противно случае f оказалась бы составной частью всех кривых пучка и кривая φ' не могла бы задавать группу G_n. Тем самым доказана теорема:

Размерность семейства g_n^r тогда и только тогда меньше размерности той линейной системы Σ, при помощи которой оно задается, когда среди кривых системы Σ имеются такие, составной частью которых является кривая f.

Обозначим как h размерность *линейной* системы H, образованной теми кривыми C системы Σ, которые содержат f в качестве составной части (см. теорему на стр. 11). Тогда через группу G_n семейства g_n^r проходит самое меньшее ∞^{h+1} кривых системы Σ; они образуют линейную систему, включающую систему H и некоторую кривую системы Σ, вырезающую группу G_n. Однако через G_n мы не можем провести и больше чем ∞^{h+1} кривых C; в самом деле, произвольная кривая линейной системы, составленной из кривых C, проходящих через группу G_n, не имеет на f *подвижных* точек пересечения; поэтому все кривые этой системы, проходящие через произвольную точку на f (то есть удовлетворяющие одному линейному условию), содержат эту кривую f как составную часть, то есть должны принадлежать системе H.

После этих приготовлений, выберем в системе Σ $R+1$ линейно независимых кривых, из которых $h+1$ принадлежат системе H. Остальные $R-h$ кривые задают некоторую линейную систему K размерности $R-h-1$; эта система не может содержать кривых из H, поскольку иначе в силу соотношения, связывающего размерности двух систем с размерностями их объединения и пересечения (см. теорему на стр. 8), обе системы H и K можно было бы объединить в линейную систему, размерность которой была бы меньше R, что противоречит тому обстоятельству, что $R+1$ кривых были выбраны линейно независимыми.

Кривые системы K, среди которых нет таких, которые содержат кривую f как составную часть, вырезают на f группы заданного семейства g_n^r, причем через каждую группу G_n семейства g_n^r можно провести одну кри-
page:66 вую семейства K. Таким образом, кривые системы Σ, проходящие через G_n, образуют линейную систему размерности $h+1$, и все такие семейства имеют общую часть – систему K. Стало быть, линейное семейство, которое система K вырезает на кривой f вне неподвижных точек, совпадает с g_n^r; и поскольку через одну группу этого семейства проходит одна и только одна кривая системы K, то получается след.:

$$r = R - h - 1.$$

Доказанное мы можем сформулировать так.

Между размерностью r линейного семейства, вырезанного на кривой f линейной ∞^R-системой Σ, и размерностью h линейной системы всех таких кривых системы Σ, содержащих кривую f в качестве составной части, имеется связь

$$r = R - h - 1.$$

При этом линейное семейство g_n^r на f всегда можно получить при помощи системы ∞^r кривых, содержащейся в заданной системе Σ.

Их этой теоремы можно получить несколько следствий.

а) *Группы семейства g_n^r, проходящие через общую точку P на f, образуют линейное семейство размерности $r-1$, для которой эта точка P является неподвижной.*

В самом деле, те кривые системы K, которые проходят через точку P на f, отличную от базовых точек системы K, составляют линейную систему размерности $r-1$, кривые которой не содержат f как составную часть. Эта система и порождает на f семейство размерности $r-1$.

Если же точка P совпадет с одной из неподвижных точек семейства g_n^r, то группы семейства g_n^r, проходящие через точку P составляют то же самое линейное семейство.[41] Таким образом, во всех случаях оказывается верным, что группы линейного семейства, проходящие через *какую угодно* точку кривой f, опять составляют линейное семейство.

Последовательное применение этой теоремы, дает следующее:

Группы линейного семейства g_n^r, проходящие через s точек кривой f ($s \leq n$), составляют линейное семейство, размерность которого лишь тогда в точности равна $r-s$, когда s точек выбрано произвольным образом.

При $s = r$ имеем:

b) *Через r общих точек проходит одна и только одна группа семейства g_n^r.*

Семейство размерности 1 может быть описано как множество групп то-
page:67 чек постоянного уровня некоторой рациональной функции подвижной точки на кривой f; тоже можно сказать и о семействе размерности r, воспользовавшись рациональной функцией, зависящую линейно от $r-1$ параметров. Именно, если группы семейства g_n^r задаются кривыми ∞^r-системы

$$\lambda_0\varphi_0(x,y) + \lambda_1\varphi_1(x,y) + \cdots + \lambda_r\varphi_r(x,y) = 0,$$

то эти группы можно описать и как группы постоянного уровня рациональной функции

$$\frac{\varphi_0(x,y)}{\varphi_r(x,y)} + \lambda_1\frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi_r(x,y)} + \cdots + \lambda_{r-1}\frac{\varphi_{r-1}(x,y)}{\varphi_r(x,y)},$$

зависящей от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}$; эти последние не могут сводится к меньшему числу независимых параметров, поскольку в противном случае
page:67 размерность семейства оказалась бы меньше r.

[41]Здесь подразумевается, что в группы включают все, в т.ч. и неподвижные точки пересечения кривой f с кривыми системы K. – Перев.

3.2 Линейная эквивалентность. Полнота линейного семейства

n:24 **24. Линейная эквивалентность двух групп точек на кривой. Понятие полного семейства.** Две группы A и B, составленные из одного и того же числа, скажем n, точек, лежащих на кривой f, называют *линейно эквивалентными* и пишут $A \equiv B$, если они принадлежат одному и тому же линейному семейству g_n^r.

Из двух эквивалентных группы первую можно считать множеством нулей, а вторую – множеством полюсов некоторой рациональной функции подвижной точки (x, y) кривой f.

В самом деле, семейство g_n^r, которому принадлежат группы A и B, вырезается на f кривыми линейной ∞^r-системы Σ (если исключить из рассмотрения неподвижные точки), и поэтому, обозначив как $\varphi = 0$ и $\varphi' = 0$ те кривые системы, которые дают эти группы, видим, что рациональная функция φ/φ' принимает значение нуль только в точках группы A ($\varphi = 0$) и бесконечность только в точках группы B ($\varphi' = 0$). Если A и B обладают совместными точками, то в них эта рациональная функция становится неопределенной, в этом случае, при желании, эти точки можно считать одновременно и нулями, и полюсами.

Докажем теперь важную теорему:

Если две группы линейно эквивалентны третьей, то они эквивалентны между собой, то есть
page:68

$$A \equiv B,\, B \equiv C \quad \Rightarrow \quad A \equiv C.$$

Эта теорема является частным случаем следующей: *если два линейных семейства g_n^r и g_n^s имеют совместную группу, то существует линейное семейство, содержащие оба эти семейства.*

Пусть первое семейство вырезается на f, вне группы K [базовых точек], системой

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r = 0, \tag{23}$$ eq:3:2:

а второе, помимо группы L, – системой

$$\mu_0\psi_0 + \mu_1\psi_1 + \cdots + \mu_s\psi_s = 0. \tag{24}$$

eq:3:2:

Пусть оба семейства имеют общую группу A, которую как группу семейства g_n^r вырезает на f кривая $\varphi_0 = 0$ и как группу семейства g_n^s – кривая $\psi_0 = 0$.

Рассмотрим линейную систему

$$\varepsilon\varphi_0\psi_0 + \lambda_1\psi_0\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\psi_0\varphi_r + \mu_1\varphi_0\psi_1 + \cdots + \mu_s\varphi_0\psi_s = 0 \tag{25}$$

eq:3:2:

Каждая произвольная кривая этой системы пересекает кривую f по группе K, так как в каждой точки этой группы функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ обращаются в нуль, и по группе L, так как в каждой точке этой группы обращаются в нуль функции $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_s$. Кроме того, она пересекает кривую f и в точках группы A, поскольку в них верно $\varphi_0 = 0$ и $\psi_0 = 0$, и поэтому в нуль обращаются все члены суммы, стоящей в левой части равенства (25). При этом точки группы A как точки пересечения кривой f с частной кривой $\varphi_0\psi_0 = 0$ считаются за два пересечения, а как точки пересечения f с общей кривой системы (25) – за одно.

После этих приготовлений, рассмотрим линейное семейство точек, вырезаемое на кривой f системой (25), удалив из его групп постоянные точки групп K, L и A. Кривые системы (25), соответствующие значениям $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0, \ldots, \mu_s = 0$, имеют уравнение

$$\psi_0(\varepsilon\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r) = 0,$$

и поэтому пересекают кривую f в точках групп K, L, A и еще одной группы семейства g_n^r, то есть рассматриваемое семейство содержит все группы g_n^r. Аналогично, это семейство содержит и все группы семейства g_n^s, которые получаются, когда обращаются в нуль параметры $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Замечание. Предложенному доказательству можно придать следующий вид. Семейство g_n^r составлено линейными постоянного уровня рациоpage:69 нальной функции

$$\Phi = \lambda_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \lambda_2 \frac{\varphi_2}{\varphi_0} + \cdots + \lambda_r \frac{\varphi_r}{\varphi_0},$$

а семейство g_n^s – группами постоянного уровня рациональной функции

$$\Psi = \mu_1 \frac{\psi_1}{\psi_0} + \mu_2 \frac{\psi_2}{\psi_0} + \cdots + \mu_s \frac{\psi_s}{\psi_0},$$

обе эти функции имеют одну и ту же группу полюсов, именно A. Среди групп равного уровня рациональной функции $\Phi + \Psi$, имеющей те же полюса, что и функции Φ и Ψ, и зависящей от параметров λ и μ, имеются и группы равного уровня функций Φ и Ψ, поэтому оба линейных семейства, имеющих общею группу, содержатся в одном и том же семействе большей размерности.

Доказанная теорема позволяет чрезвычайно важное понятие полноты семейства.

Линейное семейство g_n^r называется *полным* (completo), если не существует линейного семейства того же порядка, но большей размерности, которое бы содержало это семейство (то есть все группы g_n^r), в противном случае
S. 69 семейство называют *частичным*.

Очевидно, что увеличивая размерность линейного семейства рано или поздно придем к полному семейству, поскольку *размерность r семейства*, то есть число действительно подвижных точек группы, *не может превзойти ее порядок n.*

Куда менее очевидно, что заданное семейство содержится в одном и только одном полном семействе. Однако именно это является простым следствием доказанной только что теорему:

Полное линейное семейство, в котором содержится заданное семейство g_n^r, однозначно определено.

В самом деле, если бы линейное семейство g_n^r содержалось бы в двух различных полных семействах g_n^R и g_n^S, то эти два семейства имели бы совместные группы, составляющие g_n^r, и, следовательно, против предположения об их полноте принадлежали бы одному и тому же семейству большей размерности.

В частности группа A точек на кривой f однозначно определяет некоторое полное линейное семейство, которое обозначают символом $|A|$. Если не существует бесконечного линейного семейства, содержащего группу A, то говорят, что A задает *полное линейное семейство размерности нуль* и page:70 в все равно обозначают ее символом $|A|$.[42]

Полное линейное семейство $|A|$ *можно также определить как множество всех групп, линейно эквивалентных группе* A; в самом деле, если бы имелась не принадлежащая семейству $|A|$ группа $B \equiv A$, то существовало бы и полное линейное семейство, отличное от $|A|$ и содержащее обе группы A и B.

При бирациональных преобразованиях алгебраической кривой f эквивалентные группы переходят в эквивалентные, поэтому множество групп, эквивалентных заданной, переходит во множество групп, эквивалентных той группе, в которую переходит заданная, то есть *при бирациональных преобразованиях полные линейные семейства переходят в полные линейные семейства.*

Замечание. Теорема о единственности полного линейного семейства, содержащего заданное семейство, была доказана алгебраическим путем в классической статье Брилля и Нетера «Об алгебраических функциях и их применении в геометрии» в 1874 году [43]; исходным пунктом им послужила одна теорема, которую мы докажем много позже и которую мы смогли обойти в нашем доказательстве, последовав за Энрикесом[44]. В существенном этот прием восходит к кругу идей, возникших, хоть и в несколько

[42] Для однозначности в определении $|A|$ следовало бы принять, что все точки группы A считаются *по возможности* подвижными. Построение след. абзаца предполагает, что произвольная группа $|A|$ не проходит через особые точки рассматриваемого там преобразования, что можно оправдать лишь тогда, когда все точки группы подвижны. – Перев.

[43] Brill und Noether. Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie, Math. Ann. **7**, 269-310 (1874)

[44] F. Enriques. Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche, Torino Atti **37**, 9 (1901).

иной форме, в римановой теории алгебраических функций.

n:25 **25. Арифметические операции с линейными семействами.**[45] Пусть задано два линейных семейства $|A|$ и $|B|$ порядков n и m, то очевидно, что все группы $n+m$ точек, получающихся путем объединения групп первого семейства с группами второго, эквивалентны между собой.

Для доказательства рассмотрим две любые группы A' и B' семейств $|A|$ и $|B|$. Обозначим как $A+B$, $A+B'$ и т.д. группы, которые получаются путем объединения точек групп A, B, A, B' и т.д., тогда

$$A+B \equiv A+B', \quad A+B' \equiv A'+B'.$$

Первое их этих соотношений выражает, что группы $A+B$ и $A+B'$ принадлежат одному семейству, которое получается из всех групп $|B|$, к которым добавляются точки группы A, а последнее утверждает, что группы $A+B'$ и $A'+B'$ принадлежат одному семейству, которое получается из $|A|$ путем добавления ко всем ее группам точек B'. Сравнивая обо соотношения, получим

$$A+B \equiv A'+B',$$

что и тр. д.

Это замечание подводит нас к понятию *суммы* $|A|+|B|$ *двух заданных линейных семейств* $|A|$ *и* $|B|$. Под суммой двух семейств $|A|$ и $|B|$ понимают полное линейное семейство, содержащее группы из $n+m$ точек вида $A+B$, то есть другими словами, семейство $|A+B|$, определяемое группой $A+B$:

$$|A|+|B| = |A+B|$$

Из понятия суммы получается понятие *разности двух семейств* $|C|$ *и* $|A|$, поскольку полное семейство $|B|$, удовлетворяющее условию $|A|+|B| = |C|$, имеется только одно. В противном случае, имелось бы два полных семейства $|B|$ и $|B'|$, удовлетворяющие условию $|A|+|B| = |A|+|B'|$, но

[45]В оригинале сначала вводилось понятие вычета, затем суммы и разности, а затем автор опять возвращался к обсуждению понятия вычета. В целях удобства чтения в русском переводе текст был перекомпонован и отредактирован. – Перев.

тогда $A+B \equiv A+B'$, откуда $B \equiv B'$ и $|B| = |B'|$. Это единственное полное семейство и будем называть разностью $|C|$ и $|A|$ и писать $|B| = |C| - |A|$.

При этом следует иметь ввиду, что может не иметься ни одного семейства $|B|$, удовлетворяющего условию $|A| + |B| = |C|$. Докажем существование разности для случая, когда некоторая группа семейства $|A|$ принадлежит некоторой группе семейства $|C|$.

Итак, пусть группа A из n точек принадлежит какой либо группе C семейства $|C|$ типа g^r_{n+m} (или даже всем группам $|C|$). Группы семейства $|C|$, содержащие группу B, образуют в силу теоремы из Nr. 22 снова линейное семейство; исключив точки этой группы, мы получим семейство g^{r-s}_m, где s – число условий, налагаемых на группы заданного семейства условием прохождения через точки группы A $(0 \leq s \leq n)$. Мы утверждаем, что g^{r-s}_m – опять *полное* семейство. В противном случае, семейство g^{r-s}_m содержится в некотором семействе того же порядка, но большей размерности; далее, добавив точки A к группам этого семейства, мы получили бы семейство порядка $n+m$, имеющее бесконечно много общих групп с семейством $|C|$, но в нем не содержащееся, что невозможно, коль скоро $|C|$ – полное семейство.
page:71 Итого:

Семейство, образованное группами полного семейства, проходящими через заданные точки, тоже являет полным, если исключить из его групп заданные точки.

Обозначив дополнение к группе A в группе C как $C - A$, видим, что $g^{r-s}_m = |C - A|$. По построению очевидно, что $|A| + |C - A| = |C|$, поэтому *разность* $|C| - |A|$ *существует и равна* $|C - A|$.

Замечание 1. Про семейство $|C - A|$ говорят, что оно *содержится в* $|C|$ *частично*, желая подчеркнуть, что группы первого семейства являются частями групп второго семейства, в отличие от того случая, когда одно семейство *содержится полностью* в другом семействе того же порядка.

Замечание 2. Бриль и Нетер называли семейство, образованное группами полного семейства $|C|$, проходящими через точки A, *вычетом* (serie residua) *группы* A *относительно* $|C|$. В наших обозначениях вычет равен $|C|-|A|$, что делает тривиальным часть т.н. *теоремы о вычетах*: *Вычетами для заданной группы относительно полного линейного семейства являются также вычетами для любой другой группы, эквивалентной заданной.* Целиком теорема о вычетах будет приведена в Nr. 43.

Определение суммы можно распространить на несколько семейств $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|, \ldots$: группы вида $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ принадлежат семейству $|A_1 + A_2 + A_3 + \ldots|$, как можно убедиться по индукции.

Если в частности семейства $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_k|$ совпадают с $|A|$, то их сумму обозначают как $k|A|$ и называют *повторением семейства* $|A|$; при этом говорят о k*-кратном семействе*, если число слагаемых равно k.

Очевидно, что *понятия суммы, разности и умножения на натуральное число остаются инвариантными при бирациональных преобразованиях кривой.*

3.3 Алгебраические кривые в пространстве трех и большего числа измерений

n:25bis **26. Определения и простейшие свойства.**[46] Кривая C, принадлежащая линейному пространству S_r $(r \geq 3)$, называется *алгебраической*, если неоднородные координаты ее точки являются рациональными функциями точки, пробегающей плоскую алгебраическую кривую f, или короче, если *точка на* C *является рациональной функцией точки на* f. Кривая C называется *неприводимой* или *приводимой* в зависимости от того, является ли кривая f неприводимой или приводимой. Если f приводима, то множество точек кривой C, соответствующих составной части кривой f, по данному определению является неприводимой алгебраической кривой, которую мы будем называть *компанентой* кривой C.

[Таким образом, кривая C является алгебраической, если между ее точками и точками некоторой плоской кривой имеется алгебраическое соот-

[46]Этот № был добавлен в немецкое издание и необходим для связности изложения. – Перев.

ветствие типа $(1, \mu)$.] Докажем, что справедливо и след. утверждение:

th:3.3.1 **Теорема 3.3.1.** *Если между точками кривой C, принадлежащая линейному пространству S_r, и точками плоской неприводимой алгебраической* page:73 *кривой f имеется некоторое алгебраическое соответствие типа $(\mu, 1)$, то есть если по средствам алгебраических операций точке кривой C поставлена в соответствие одна точка кривой f, а точке кривой f – μ точек кривой C, то кривая C сама является алгебраической.*

Для примера примем, что кривая C принадлежит S_3, а кривая f лежит в плоскости γ. Возьмем на C *простую* точку P, тогда прямые, соединяющие P с остальными точками кривой C, образуют конус, которому принадлежит среди прочих и касательная к кривой, проведенная в точке P; поэтому произвольным образом проведенная через точку P прямая u не пересекает кривую C в каких либо еще точках.

Спроектировав кривую C из произвольной точки O прямой u на плоскость π, получим кривую φ, между точками которой и точками кривой f имеется соответствие, выражаемое при помощи алгебраических операций; в самом деле, чтобы из f попасть на φ, следует к проектированию из O на плоскость π добавить те алгебраические операции, при помощи которых происходит переход от f к C, а само проектирование всегда может быть выражено при помощи алгебраических операций. Значит, φ – алгебраическая кривая.

Пусть P' – проекция точки P на плоскость π. Поскольку точке P' на φ отвечает только *одна* точка P на C, то, если φ неприводима, каждой точке кривой φ соответствует одна и только одна точка кривой C. Следовательно, точка на C является рациональной функцией точки на φ, то есть C является алгебраической кривой.

Если же кривая φ приводима, то можно указать ее неприводимую компоненту ψ, проходящую через точку P' и обладающую тем свойством, что каждой точке кривой ψ отвечает одна единственная точка кривой C, хотя прочие компоненты кривой φ могут и не обладать этим свойством. В этом

случае кривой ψ соответствует *компонента* Γ кривой C, которая, следовательно, является алгебраической кривой, и при переходе от C к f эта компонента должна перейти во всю кривую f, поскольку последняя является неприводимой по предположению. Обозначим как D то, что останется от кривой C после удаления Γ, тогда каждой точек кривой f отвечают μ точек кривой C, из которых $\nu \geq 1$ принадлежат Γ, а остальные $\mu - \nu$ лежат на кривой D. Поскольку группа ν точек, лежащих на Γ, может быть отделена рациональным путем от остальных $\mu - \nu$ точек, которые вмести с ними составляют группу точек кривой C, соответствующих одной точки на f, то между кривыми f и D имеется алгебраическое соответствие типа $(1, \mu - \nu)$. Применяя к D те же размышления, какие мы только что
page:74 применили к C, мы придем к тому выводу, что D или является алгебраической или составлена из алгебраической компоненты, состоящей с кривой f в соответствии типа $(\rho, 1)$ $(\rho \geq 1)$, и некоторой кривой E, состоящей с f в соответствии типа $(\mu - \nu - \rho, 1)$. Повторяя эти шаги несколько раз, в конце концов придем к том, что кривая C является алгебраической.

В качестве приложения этой теоремы докажем следующее:

cor:3.3.1 **Следствие 3.3.1.** *Пусть*

$$\alpha(x, y, z) = 0, \quad \beta(x, y, z) = 0$$

– две алгебраические поверхности, не имеющие общих компонент, тогда их пересечение C является алгебраической кривой.

Пусть $f(x, y) = 0$ – алгебраическое уравнение, которое получится, если исключить переменную z из этих уравнений. В том особом случае, когда кривая C имеет прямолинейную компоненту, выберем координатные оси таким образом, чтобы эта прямая не была параллельна оси z. Тогда в любом случае каждому решению (x, y) уравнения $f = 0$ отвечает *конечное число* решений (x, y, z) системы

$$\{\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

и эти решения могут быть найдены алгебраическим путем. Таким образом, каждой компоненте φ кривой f, если эта кривая приводима, отвечает некоторая компонента Γ кривой C, состоящая с φ в соответствии типа $(\mu, 1)$. Поэтому, согласно только что доказанной теореме, кривая Γ является алгебраической, и кривая C, составленная, стало быть, из конечного числа алгебраических кривых, тоже является алгебраической.

Другое простое следствие из этой теоремы состоит в след.:

cor:3.3.2 **Следствие 3.3.2.** *Если между точками кривой C, принадлежащей S_r, и точками плоской алгебраической кривой f имеет алгебраическое соответствие (μ, ν), то кривая C является алгебраической.*

Для доказательства рассмотрим ∞^1-образ Γ, элементами которого служат такие пары соответствующих друг другу точек; это соответствие по предположению осуществляется *алгебраическим путем*, причем точке кривой C отвечают ν точек кривой f, точке кривой f – μ точек кривой C. Таким образом, между кривой C и образом Γ имеется *алгебраическое* соответствие типа $(1, \nu)$: точка кривой C и элемент (пара точек) образа Γ следует считать соответствующими, если точка кривой принадлежит паре. Аналогично, имеется соответствие типа $(\mu, 1)$ между образом Γ и кривой
page:75 f. Согласно доказанной только что теореме, образ Γ является алгебраической кривой, то есть подвижный элемент образа Γ является рациональной функцией подвижной точки некоторой плоской алгебраической кривой φ. Подвижная точка кривой C является рациональной функцией подвижного элемента на Γ, поэтому подвижная точка кривой C является рациональной функцией подвижной точки кривой φ; по нашему определению это и означает, что C – алгебраическая кривая.

n:26 **27. Связь между теорией линейных семейств групп точек на плоской кривой и понятие кривой в пространстве.** Рассмотрим на плоской кривой

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0$$

(где x_0, x_1, x_2 – однородные координаты) линейное семейство g_n^r групп точек задаются системой

$$\lambda_0\varphi_0(x_0, x_1, x_2) + \lambda_1\varphi_1(x_0, x_1, x_2) + \cdots + \lambda_r\varphi_r(x_0, x_1, x_2) = 0. \qquad (26)$$ eq:3:3:

Сейчас будет удобно, исключив из рассмотрения неподвижные точки, считать все точки произвольной группы семейства g_n^r подвижными.

Введем в пространстве S_r систему однородных координат $y_0, y_1, \ldots, y_r$ и положим

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0, x_1, x_2). \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, r)$$

Когда точка $x = (x_0, x_1, x_2)$ пробегает кривую f, точка $y = (y_0, y_1, \ldots, y_r)$ не может оставаться неподвижной; в самом деле, в противном случае функции φ_i точки x могли бы различаться только постоянным множителем, а следовательно, семейство g_n^r имело бы размерность нуль – этот особый случай мы, конечно, исключаем из рассмотрения. Таким образом, точка y описывает некоторую алгебраическую кривую C, причем каждой точке кривой f поставлена в соответствие одна и только одна точка кривой C. Сколько точек кривой f соответствует одной точке кривой C?

Две точки x и x' кривой f переходят в одну и ту же точку y на C тогда и только тогда, когда верно

$$\varphi_i(x) = \sigma\varphi_i(x'),$$

то есть когда произвольная кривая системы (26), проходящая через точку
page:76 x, неизбежно проходит и через точку x'.[47]. Другими словами, необходимым и достаточным условием является то, что все группы семейства g_n^r, содержащие точку x, содержат также и точку x'.

Если группы семейства g_n^r, проходящие через произвольную точку x кривой f, не имеют других совместных точек, то линейное семейство называют *простым*; если же группы, проходящие через точку x, имеют совместными еще $\mu - 1$ точек, то говорят, что линейное семейство *составлено из инволюции* (con un involuzione) порядка μ.

[47]Ср. это условие с разграничением систем на простые и составные в Nr. 13.– Автор.

Напр., линейное семейство, вырезанное на плоской кривой системой всех кривых заданного порядка, всегда *просто*; если же на кривой f порядка n имеется точка P кратности $n-2$, то система кривых порядка $n-3$, имеющих в точке P точку кратности $n-3$, вырезают на f составное семейство. В самом деле, эти кривые распадаются на $n-3$ прямые, проходящие через точку P, и поэтому те из них, которые проходят через произвольную точку Q на f, содержат целиком прямую PQ; эта прямая пересекает кривую f в трех точках, именно в точке P с кратностью $n-2$, в Q и еще в одной точке, положение которой зависит от выбора Q, поэтому группы точек, содержащие точку Q, содержат еще и эту третью точку.

Введенное выше выражение – линейное семейство составлено из инволюции порядка μ – оправдано следующим обстоятельством. Если задана точка x, то с ней связано еще $\mu-1$ точек $x', x'', \ldots, x^{(\mu-1)}$, таких, что группа μ точек $x, x', \ldots, x^{(\mu-1)}$ определяется заданием одной из них, поскольку группы семейства g_n^r, проходящие через одну из них, проходят и через все остальные.

Когда точка x пробегает кривую f, эта группа μ точек описывает некоторую ∞^1-систему γ_μ^1, которую называют *инволюцией порядка* μ (и размерности 1[48]), если μ точек группы равнозначны и если через каждую точку кривой f проходит одна и только одна группа семейства γ_μ. Остается заметить, что группа семейства g_n^r составлена из $\frac{n}{\mu}$ групп инволюции γ_μ.

Рассмотрим теперь подробнее случай, когда семейство g_n^r *просто*. Тогда между точками кривых f и C имеется взаимно однозначное соответствие, поэтому неоднородные координаты $\left(\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_r}{y_0}\right)$ подвижной y точ- page:77
ки на C являются рациональными функциями неоднородных координат $\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$ соответствующей точки x на кривой f и наоборот координаты точки x являются рациональными функциями координат точки y, поскольку эти последние должны быть однозначными алгебраическими функциями. Итого: *кривые f и C связаны бирациональным соответствием*; при

[48]Выше в № 13 упоминалась плоская инволюция, размерность которой, очевидно равна 2. – Перев.

этом следует различать такого рода соответствия и те, которые можно указать для плоских кривых, воспользовавшись преобразованием Кремоны между двумя плоскостями. Бирациональное соответствие между точками двух кривых не обязательно продолжаться до бирационального соответствия пространств, содержащих эти кривые. Такое продолжение, очевидно, невозможно, если эти пространства имеют разную размерность; но даже если C является плоской кривой ($r = 2$), то формулы

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0, x_1, x_2) \quad (i = 0, 1, 2) \tag{27}$$

eq:3:3:

могут задавать бирациональное соответствие между точка кривых f и C, но не между плоскостями (x_0, x_1, x_2) и (y_0, y_1, y_2).[49]

В самом деле, предположим, что формула (27) задает соответствие типа $(1, \nu)$ между точками плоскости (y_0, y_1, y_2) и точками плоскости (x_0, x_1, x_2), то есть соответствие, при котором точке y отвечает ν точек x, а точке x – одна единственная точка y, тогда мы получим на плоскости (x_0, x_1, x_2) ∞^2-инволюцию J_ν; она порождена сетью кривых, соответствующих прямым плоскости (y_0, y_1, y_2) (см. стр. 37). Возьмем на плоскости (x_0, x_1, x_2) кривую f, *не принадлежащую инволюции* J_ν, то есть такую кривую, что $\nu - 1$ точек, сопряженные с какой либо ее точкой в инволюции J_ν, не лежат на этой кривой[50], тогда при движении точки по кривой f соответствующая точка y описывает кривую C, бирационально эквивалентную f, поскольку из ν точек x, соответствующих точке y кривой C, лишь *одна единственная* лежит на кривой f. Формула (27) задает, таким образом, бирациональное
page:78
соответствие между точками кривых f и C, но не между точками плоскостей, в которых расположены кривые f и C.

К сказанному еще можно прибавить, что формулы того же вида (27) могут задавать соответствие типа $(1, \nu')$ между точками двух кривых, когда $\nu' \leq \nu$; так случиться, если подвижной на кривой C точке y отвечает

[49]Ср. *Энциклопедии математических наук*, Art. III с 11, № 56. – Перев.

[50]Такая кривая получится, если зафиксировать *одну* группу $x, x', x'', \ldots, x^{(\nu-1)}$ инволюции J_ν и рассмотреть кривую, проходящую через точку x и не проходящую через сопряженные к ней точки. – Автор.

ν точек x, из которых только ν' пробегают по f, а остальные $\nu - \nu'$ – вне кривой f.

Вернемся теперь к тому случаю, когда r – произвольно, а между кривыми f и C имеется бирациональная связь.

Легко видеть, что кривая C содержится в пространстве S_r, но не в пространстве меньшей размерности. В противном случае, можно было бы указать гиперплоскость [51]

$$\xi_0 y_0 + \xi_1 y_1 + \cdots + \xi_r y_r = 0,$$

содержащее кривую C, то есть равенство

$$\xi_0 \varphi_0(x_0, x_1, x_2) + \cdots + \xi_r \varphi_r(x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{28}$$

eq:3:3:

было бы верно для всех значений x_0, x_1, x_2, представляющих координаты подвижной точки кривой f. Если уравнение (28) выполняется тождественно, и при этом не все множители ξ_i обращаются в нуль тождественно, и к тому же не только для для подвижной точки кривой f, но и для произвольным образом выбранной точки плоскости, то формы φ_i линейно зависимы и поэтому система (26) не может иметь размерность r. Если же уравнение (28) справедливо только для точек кривой f, то тождественно выполняет соотношение вида

$$\xi_0 \varphi_0 + \xi_1 \varphi_1 + \cdots + \xi_r \varphi_r = \varphi(x_0, x_1, x_2) f(x_0, x_1, x_2),$$

то есть все кривые системы (26) содержат компоненту f и поэтому тогда семейство g_n не имеет размерность r (см. Nr. 23). Оба эти вывода противоречат посылке. Следовательно, никакая гиперплоскость не содержит кривой C.

Докажем теперь, что при этом бирациональном преобразовании между кривыми f и C точкам, принадлежащим одной группе семейства g_n^r на кривой f, соответствуют точки, в которых кривую C пересекает одна вполне

[51] Под «гиперплоскостью» (*iperpiano*) автор разумеет линейное подпространство пространства S_r размерности $r - 1$. – Леффлер.

определенная гиперплоскость, и что эта плоскость меняется при изменении
page:79 группы.

В самом деле, координаты точек, принадлежащих одной группе семейства g_n^r, удовлетворяют уравнению (26) при надлежащим образом выбранных значениях параметров λ_i, не все из которых равны нулю, и поэтому координаты соответствующих точек y удовлетворяют уравнению

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r = 0,$$

то есть эти точки принадлежат одной вполне определенной гиперплоскости.

И наоборот, точка кривой C, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, отвечают точки той группы, которая вырезается кривой (26) на f за вычетом неподвижных точек. Итого:

Кривая C пересекается с произвольной гиперплоскостью содержащего ее пространства в n точках.

Это постоянное число называется порядком алгебраической кривой C.

Добавим к этому еще, что соответствие между группами семейства g_n^r и точками пересечения гиперповерхностей с кривой C *проективно*, поскольку и группа, и гиперплоскость, ей соответствующая, характеризуются одними и теми же значениями параметров λ_i. Собирая доказанные утверждения вмести, имеем:

Пусть на плоской алгебраической кривой f задано простое линейное семейство g_n^r, то в r-мерном пространстве S_r можно построить алгебраическую кривую C порядка n, между которой и кривой f имеется такое бирациональное соответствие, что группам семейства g_n^r соответствуют точки пересечения кривой C с гиперплоскостями. – Для построения кривой C следует заметить, что группы семейства g_n^r проективны гиперплоскостям пространства S_r: группам семейства g_n^r, содержащим точку x на f, отвечают гиперплоскости, проходящие через одну и ту же точку y пространства S_r, и когда точка x пробегает кривую f, точка y описывает кривую C.

Если же линейное семейство g_n^r составлено из некоторой инволюции, то точки кривой C состоят во взаимно однозначном соответствии не с точками на f, но с группами точек γ_μ. Как и выше можно доказать, что кривая C не может содержаться в пространстве, размерность которого меньше r. Повторяя рассмотрение, преведшее выше к определению порядка, получим, что в данном случае кривая C пересекается с произвольной гиперплоскостью в $\frac{n}{\mu}$ точках, поскольку каждому пересечению кривой C с гиперплоскостью отвечает μ точек одной вполне определенной группы семейства g_n^r. Это
page:80 означает, что в данном случае кривая C имеет порядок $\frac{n}{\mu}$. Итого:

Пусть на плоской алгебраической кривой f заданно линейное семейство g_n^r, составленное из инволюции порядка μ, тогда в r-мерном пространстве S_r можно построить алгебраическую кривую C порядка $\frac{n}{\mu}$, связанную с кривой f алгебраическим соответствием типа $(1, \mu)$. – Для построения кривой C следует заметить, что группы g_n^r проективны гиперплоскостям пространства S_r: гиперплоскости, соответствующие группам семейства g_n^r, проходящим через точку x, проходят через одну и ту же точку y, и именно эта точка отвечает точке x. Когда точка x пробегает кривую f, точка y описывает кривую C.

Возможность введения порядка кривой в многомерном пространстве указывает, что можно обобщить и теорему Безу, указавающую число точек пересечения двух кривых заданных порядков.

Речь идет о подсчете *числа точек, общих алгебраической кривой C порядка n и алгебраической формы порядка m*[52].

Чтобы подсчитать это число, мы должны для начала договориться о том, что мы будем понимать под кратностью пересечения кривой и формы в совместной точке. То, что кривая C и форма F в совместной точке O имеют кратность пересечения J, означает, что форма F', достаточно близ-

[52]Напомним, что выражение «форма» или «алгебраическая гиперповерхность» означает множество ∞^{r-1} точек, однородные координаты которых удовлетворяют обращают в нуль заданную алгебраическую форму (однородный полином). Порядок формы – степень этого полинома. См., напр., Bertini, Introduzione alla geometria и т.д., стр. 164. – Автор.

кая к форме F (то есть коэффициенты уравнения для которой которой считаются сколь угодно близкими к коэффициентам уравнения), пересекается с C в J отличных друг от друга точках, стремящихся к точке O при непрерывном стремлении формы F' к форме F.

Определив кратность пересечения таким чисто геометрическим путем, сразу видим, что сумма кратностей точек пересечения формы F и кривой C остается неизменной при непрерывном движении F, если, конечно, предположить, что это движение происходит таким образом, что ни кривая C, ни какая либо ее компонента не лежат на форме F. В частности, форму page:81 F можно деформировать в такую, левую часть уравнения которой разлагается на m линейных множителей (где m – порядок F), а, значит, сама форма распадается на m гиперплоскостей, каждая их которых не содержит ни кривой C, ни ее компонент. Эта форма имеет в точности mn точек пересечения с кривой, поэтому:

th:Bezout **Теорема 3.3.2.** *Алгебраическая кривая порядка n и форма порядка m имеют mn общих точек, если каждую из них считать с учетом кратности и ни кривая, ни ее компоненты не лежат на форме.*[53]

n:27 **28. Линейные семейства на кривых в многомерном пространстве.** Пусть C – неприводимая кривая, принадлежащая пространству S_r, а f – плоская кривая, связанная с C бирационально. Тогда произвольным образом выбранному семейству g_m^s кривой f на кривой C отвечает ∞^s-система: она образована группами по m точек в каждой и через s выбранных произвольным образом точек кривой C проходит одна единственная такая группа. Такую систему будем называть *линейным семейством порядка m и размерности s на кривой C* в многомерном пространстве и обозначать ее все тем же символом g_m^s, [что не может быть источником недоразумений].

Легко заметить, что *линейное семейство g_m^s вырезает на кривой C ли-*

[53] Дальнейшие подробности см. в цитированном выше сочинении Бертини (стр. 358). – Автор.

нейная система форм[54]

$$\lambda_0\alpha_0(y_0, y_1, \dots y_r) + \dots + \lambda_s\alpha_s(y_0, y_1, \dots y_r) = 0, \tag{29}$$ eq:3:3:

быть может, после исключения неподвижных точек.

Для доказательства заметим, что семейство g_m^s вырезается на кривой f линейной ∞^s-системой вида

$$\mu_0\beta_0(x_0, x_1, x_2) + \dots + \mu_s\beta_s(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{30}$$ eq:3:3:

(за исключением известного числа неподвижных точек). Координаты двух соответствующих друг другу точек кривых f и C связаны формулами

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0, x_1, x_2), \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

причем в силу бирациональности это преобразование допускает рациональное обращение, то есть и координаты x_j можно выразить как формы y_i:

$$\sigma x_j = \psi_j(y_0, y_1, y_2, \dots, y_r). \quad (j = 0, 1, 2)$$

page:82 Поэтому группа m *подвижных* точек, вырезаемых на кривой f кривыми (30), соответствует группа того же числа подвижных точек, вырезанных на кривой C формой

$$\mu_0\beta_0(\psi_0, \psi_1, \psi_2) + \dots + \mu_s\beta_s(\psi_0, \psi_1, \psi_2) = 0,$$

а это равенство имеет вид (29).

Пока высказанное утверждение было доказано в предположении, что заданное на кривой f семейство g_m^s не имеет постоянных точек. Но если оно имеет h таких точек, то можно рассмотреть семейство g_{m-h}^s, полученное из предыдущего путем удаления постоянных точек, и применить к нему уже доказанную теорему.

Тем же путем можно доказать обратное утверждение: система групп точек, вырезанная на кривой C линейной системой форм, отвечает линейному семейству на кривой f и поэтому само семейство групп на C является линейным в смысле данного выше определения.

[54] Если в уравнение подвижной формы входит линейно некоторое число параметров, то говорят, что форма пробегает линейную систему. – Автор.

Воспользовавшись результатами Nr. 23, видим, что *размерность s линейного семейства, рассматриваемого на кривой C, только тогда равно размерности d вырезающего его линейной системы, когда среди форм этой системы не имеется таких, которые бы содержали C; если же, против того, в системе имеется ∞^t форм, содержащих кривую C, то верно соотношение*

$$s = d - t - 1.$$

В самом деле, через s общих точек кривой C должна проходит одна и только одна группа семейства g_m^s, поэтому те формы системы, которые проходят через эти s точек, не могут иметь на кривой C подвижных точек. Одна такая форма, которая проходит через любую отличную от неподвижных точек пересечения точку на C, имеет с кривой C больше пересечений, чем то позволяет доказанная выше теорема Безу (см. теорему 3.3.2 пред. №); поэтому кривая C, неприводимая по условию, должна целиком лежать на этой форме. Если на ∞^d форм, вырезающих рассматриваемое линейное семейство, наложить $s+1$ простых условий, то получиться ∞^t форм, содержащих кривую C, то есть имеет место равенство

$$d - s - 1 = t \quad \text{или} \quad s = d - t - 1.$$

Если, в частности, кривая C порядка n принадлежит пространству S_r, но не пространству меньшей размерности, то гиперплоскости пространства S_r вырезают на C семейство g_n^r, которому бирациональное преобразование

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0, x_1, x_2), \quad (i = 0, 1, \ldots, r)$$
$$\sigma x_j = \psi_j(y_0, \ldots, y_r), \quad (j = 0, 1, 2)$$

page:83 связывающее координаты точек кривых f и C, ставит в соответствие семейство g_n^r, вырезаемое на кривой f, быть может, после исключения неподвижных точек пересечения линейной системой

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r = 0$$

Аналогично, линейному семейству g_h^2, вырезанному на кривой f порядка h прямыми ее плоскости, соответствует линейное семейство, вырезанное на кривой C линейной системой форм

$$\nu_0\psi_0 + \nu_1\psi_1 + \nu_2\psi_2 = 0.$$

Наконец, из сказанного выше сразу получается и след.:

Семейство g_m^s на кривой C в многомерном пространстве, за исключением неподвижных точек, вырезается линейной системой алгебраических форм, имеющей ту же размерность s.

n:28 **29. Рациональные соответствия между двумя кривыми в многомерном пространстве.** Пусть C – неприводимая алгебраическая кривая пространства S_h, однородные координаты точки этого пространства будем обозначать как $(x_0, x_1, \dots, x_h)$. Рассмотрим на кривой C семейство g_n^r, которое (по исключению неподвижных точек) задается линейной системой

$$\lambda_0\varphi_0(x_0, x_1, \dots, x_h) + \dots + \lambda_r\varphi_r(x_0, x_1, \dots, x_h) = 0,$$

и положим

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0, x_1, \dots, x_h). \quad (i = 0, \dots, r) \tag{31}$$ eq:3:3:

Когда точка $x = (x_0, x_1, \dots, x_h)$ пробегает кривую C, точка $y = (y_0, y_1, \dots, y_r)$ описывает в пространстве S_r кривую D. Эта кривая, очевидно, алгебраическая и неприводимая. В самом деле, кривая C – алгебраическая, поэтому ее можно отобразить на надлежащим образом выбранную неприводимую плоскую алгебраическую кривую $f(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 0$ таким образом, чтобы координаты ее точки x пропорциональны $h+1$ алгебраической форме переменных ξ_0, ξ_1, ξ_2; но тогда, в силу формулы (31), и координаты подвижной точки y кривой D пропорциональны некоторому числу алгебраических форм координат ξ_0, ξ_1, ξ_2 точки, подвижной на кривой f.

Как и в Nr. 27, имеем след.:

a) Поскольку система

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_r\varphi_r = 0$$

не содержит форм, проходящих через кривую C (в противном случае размерность рассматриваемого семейства была бы строго меньше r), в про-page:84 странстве S_r нельзя провести гиперплоскость, целиком содержащую кривую D; таким образом, эта кривая *принадлежит* пространству S_r, но не пространству меньшей размерности.

b) Формулы (31) обратимы только тогда, то есть только тогда из них можно выразить x_j через y_i, когда заданное на кривой C семейство g_n^r *не составлено из некоторой инволюции*, другими словами, когда группы семейства g_n^r, проходящие через произвольную точку кривой C, не имеют других общих точек, меняющих свое положение при перемещении первой точкой. Если это условие выполнено и линейное семейство g_n^r не имеет неподвижных точек, то кривая D имеет порядок n.

c) Если лишенное неподвижных точек семейство g_n^r составлено из некоторой инволюции порядка μ, то есть если те ее группы, которые содержат заданную точку кривой C, необходимо имеют совместными еще $\mu - 1$ других подвижных точек, так, что группа семейства g_n^r оказывается со ставленой из $\frac{n}{\mu}$ групп инволюции, то порядок кривой D равен $\frac{n}{\mu}$.

В случае b) неоднородные координаты точки кривой D являются рациональными функциями неоднородных координат соответствующей точки кривой C и наоборот; таким образом, между кривыми C и D имеется *бирациональное соответствие.*

В случае c), против того, между кривыми C и D имеется *соответствие, рациональное только в одну сторону*, то есть соответствие, которое одну точку кривой C переводит в одну точку кривой D, а одну точку кривой D – в μ точек кривой C. В этом последнем случае кривая D оказывается в бирациональном соответствии с группами инволюцией, из которых составлены группы семейства g_n^r.

Не будем пока делать никаких предположений относительно того, обратимы ли формулы (31) или нет.

Как преобразуется заданное на кривой D семейство g_m^s при рациональной подстановке (31)?

Если g^s_m на D, кроме постоянных точек, вырезается системой

$$\nu_0\psi_0(y_0, y_1, \ldots, y_r) + \cdots + \nu_s\psi_s(y_0, y_1, \ldots, y_r) = 0,$$

то группы из $m\mu$ точек ($\mu \geq 1$), соответствующие группам из m точек семейства g^s_m, вырезаются на кривой C, кроме, быть может, неподвижных точек, линейной системой

$$\nu_0\psi_0(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r) + \cdots + \nu_s\psi_s(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r) = 0,$$

и поэтому множество таких групп из $m\mu$ точек образует на кривой C линейное семейство $g^s_{m\mu}$. Итого:

Если между точками двух алгебраических кривых D и C, лежащих в многомерных пространствах, имеется алгебраическое соответствие типа $(1, \mu)$, то линейному семейству g^s_m на кривой D отвечает линейное семейство $g^s_{m\mu}$ на кривой C.

Можно еще заметить, что при $\mu > 1$ это последнее линейное семейство составлено из той же инволюции порядка μ, из которой было составлено заданное семейство g^r_n.

n:29 **30. Проекции кривых в многомерных пространствах.** Пусть C – неприводимая кривая порядка n, лежащая в пространстве S_r, а O – некоторая точка этого пространства. Прямая, соединяющая точку O с произвольной точкой кривой C, пересекает эту кривую в одной или нескольких точках; но в любом случае число этих точек конечно, поскольку оно не превышает число точек пресечения кривой с гиперплоскостью, проходящей через эту прямую, которое равно n.

Если, кроме того, точка O выбрана в пространстве произвольным образом, то проходящая через нее прямая, опирающаяся на подвижную точку кривой C, не пересекает C в каких либо других точках (быть может, если исключить некоторые особые положения прямой); аналогично, хорда, соединяющая две произвольные точки кривой C, не пересекает эту кривую в каких либо других точках.

page:86 Все это легко доказать из элементарных соображений.[55]

Посечем конус, образованный лучами, соединяющими точку O – вершину конуса – со всевозможными точками кривой C, гиперплоскостью ω, не проходящей через точку O, тогда на ω получится кривая C', которую называют *проекцией кривой C из центра O на гиперплоскость ω*. Если луч, соединяющий точку O с произвольной точкой кривой C, содержит i отличных от O точек кривой, то между кривыми C и C' имеется соответствие типа $(i, 1)$, при котором произвольной точек кривой C отвечает одна точка кривой C', а произвольной точке кривой C' – i точек кривой C.

Нетрудно доказать, что это соответствие – *алгебраическое*. Чтобы вывести это, достаточно показать, что координаты подвижной точки на кривой C' являются рациональными функциями координат соответствующей точки на C.

Пусть на кривой C задана точка P с координатами $(x_0, x_1, \dots, x_r)$, тогда подвижной точки на прямой OP могут быть выражены так

$$\lambda x_j + \mu a_j, \quad (j = 0, 1, \dots, r)$$

где $(a_0, a_1, \dots, a_r)$ – координаты центра O, а λ, μ – параметры. Пусть еще задано уравнение гиперплоскости ω

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \dots \alpha_r y_r = 0,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ – заданные коэффициенты, а $(y_0, y_1, \dots, y_r t)$ – координаты

note:page:85 [55] На самом деле справедливо более общее утверждение: *Линейное пространство S_{i-1}, проходящее через $i \leq r-1$ произвольных точек кривой C пространства S_r, не пересекает кривую в каких либо других точках.* Если эта теорема справедлива для любого $i < k$ и любого r, то она справедлива и для $i = k$, в чем можно убедиться, рассмотрев проекцию кривой C из произвольной точки на гиперплоскость. Поэтому достаточно доказать эту теорему для $i = 2$, то есть показать, что при $r > 2$ не каждая хорда кривой C может пересечь кривую в третий раз. Допустим противное, пусть AB – произвольным образом выбранная хорда кривой C и P – третья точка, в которой эта кривая пересекается с кривой C, тогда кривая C проектируется из точки P проектируется как минимум дважды; и коль скоро AB не может быть кратной образующей проекционного конуса, касательные в точках A и B к кривой C должны пересекаться, поскольку они лежат в той плоскости, которая касается конуса вдоль AB. Но если касательные кривой C пересекаются с другими касательными и если не все их них проходят через одну точку, то все они лежат в одной плоскости, то есть C является плоской кривой, вопреки предположению. Это рассмотрение принадлежит Кастельнуово (G. Castelnuovo). – Леффлер.

подвижной точки на ω. Точка P', в которой пересекаются прямая OP и гиперплоскость ω, получится, если отношение $\frac{\lambda}{\mu}$ определить таким образом, чтобы было верно

$$\lambda(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r) + \mu(\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r) = 0.$$

Таким образом, координаты точки P', общей прямой OP и плоскости ω, имеют следующий вид:

$$x_j(\alpha_0 a_0 + \cdots + \alpha_r a_r) - a_j(\alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_r x_r). \quad (j = 0, 1, \ldots, r)$$

Эти выражения получаются из координат точки P рациональным (линейным) путем. Отсюда получается, что координаты точки P', описывающей кривую C', являются рациональными функциями координат точки P, пробегающей кривую C.

Но поскольку кривая C по предположению является алгебраической, координаты подвижной точки рациональными функциями координат подвижной точки на надлежащим образом выбранной плоской алгебраической кривой Γ; следовательно, координаты подвижной точки и на C' являются рациональными функциями подвижной точки на Γ.

Отсюда в силу определения алгебраической кривой в пространстве многих измерений, получаем след.:

Проекция алгебраической кривой опять является алгебраической кривой.

К сказанному следует еще добавить, что, *если заданная кривая является неприводимой, то такова и ее проекция*, поскольку в этому случае неприводимой оказывается кривая Γ.

Эти теоремы остаются в силе и в том случае, когда обсуждаемое проектирование осуществляется не из точки, но из прямой, плоскости или [линейного] пространства большей размерности.

Пусть центром проекции является пространство O размерности d ($\leq r - 2$), которое может пересекаться с заданной кривой C в одной или нескольких точках, тогда под проекцией кривой C понимают такую кривую

C', которая получается на независящем от O пространстве ω размерности $r-d-1$, если посечь это последнее пространствами размерности $d+1$, соединяющими пространство O с подвижной точкой кривой C.

Распространив использованный выше прием на этот случай, сразу увидим, что координаты подвижной точки кривой C являются рациональными функциями координат соответствующей точки на C.

Впрочем, это утверждение можно доказать иначе, если вспомнить широко известное предложение геометрии многих измерений: проектирование из центра произвольной размерности может быть составлено из нескольких проектирований, центами которых служат точки. Напр., чтобы спроектировать кривую C из прямой O на пространство ω размерности $r-2$, можно взять две произвольные точки O_1 и O_2 на прямой O, построить проекцию C_1 кривую C из точки O_1 на гиперплоскость $O_2\omega$ и, наконец, спроектировать C_1 из точки O_2 на пространство ω размерности $r-2$. Полученная таким образом кривая C' совпадет с той, которую мы получили бы, проектируя C непосредственно из прямой O на пространство ω.

Если в частности центр проектирования O имеет размерности $r-3$, то пространство ω, на которое проектируется заданная кривая, имеет размерности 2, и поэтому кривая C' является плоской алгебраической кривой.

Выберем теперь пространство O а общем положении относительно кривой C, то есть так, чтобы пространство S_{r-2}, соединяющее O с произвольной (общей) точкой P на кривой C, не пересекало кривую в других точках, тогда плоская кривая C' состоит во взаимно однозначном (бирациональном) соответствии с кривой C.

Отсюда легко понять, *как можно построить при помощи простой проекции плоскую кривую, бирационально эквивалентную алгебраической кривой во многомерном пространстве.*

Перечислим теперь те следствия из этого предложения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть пространство O размерности d расположено относительно C

вполне произвольным образом; мы утверждаем, что произвольная (общая) гиперплоскость, проходящая через O, пересекает неприводимую кривую C в *подвижных* и отличных друг от друга точках (кроме, быть может, пересечений пространства O с кривой C, если таковые имеются).

Именно, можно заметить след.:

a) Гиперплоскости, касающиеся кривой C, – это те гиперплоскости, которые содержат касательную прямую к этой кривой.

b) Не все касательные прямые к кривой C могут проходить через пространство O (если $d \leq r-2$). В противном случае проектируя кривую C на S_{r-d} из пространства S_{d-1}, содержащегося в O, можно было бы получить кривую, все касательные к которой пересекаются в одной точке, и, значит, проектируя эту кривую из пространства S_{r-d-3}, лежащего в S_{r-d}, на плоскость, получить плоскую кривую, обладающую тем же свойством, что невозможно.

c) Через произвольную касательную прямую к кривой C, не пересекающую пространство O, проходят ∞^{r-d-3} гиперплоскостей, содержащих O, следовательно, через O проходят только ∞^{r-d-2} гиперплоскостей, касающихся кривой C. [56]

Собирая все вместе, имеем:

Кривая C, принадлежащая пространству S_r, пересекается с гипер-

[56]В немецком переводе здесь добавлен еще один пункт.

d) Поскольку кратных точек на кривой C может быть лишь конечное число, имеется только ∞^{r-d-2} гиперплоскостей, проходящих через O и какую либо из этих кратных точек.

Относительно понятия кратности чуть выше в немецком переводе добавлено след. разъяснение,

При бирациональном соответствии между кривой C во многомерном пространстве и ее плоской проекции C' каждой ветви C' (см. Nr. 20) соответствует на кривой C множество точек, которое тоже можно назвать *ветвью*. При этом (неоднородные) координаты точки ветви кривой C могут быть представлены при помощи степенных рядов параметра t, сходящихся в некотором круге. Это позволяет ввести и для ветви на кривой C понятие *порядка*, под которым понимают число точек, в которых эта ветвь пересекается с гиперплоскостью, проведенной произвольным образом вблизи начала ветви (см., напр., Bertini, Introduzione и т.д., стр. 359.). Точка кривой C, которая служит началом одной единственной ветви первого порядка, называется *простой*; прочие же точки называются *кратными* (s-кратными), если сумма порядков всех ветвей, которым они служат началами, больше единицы (а именно, равно s).

– Перев.

плоскостью, пробегающей линейную систему [всех гиперплоскостей, проходящих через заданное произвольным образом пространство O], в подвижных точках, которые отличны друг от друга.

n:30 **31. Связь между порядком кривой и порядком ее проекции.** Как связаны порядок n кривой C и порядок n' кривой C', проекции кривой C из пространства O размерности d на пространство ω размерности $r-d-1$? Читатель без труда убедиться в справедливости следующего утверждения: если пространство O пересекается с кривой C в h точках и если S_{d+1}, проектирующее произвольную точку кривой C из O, проектирует еще $i-1$ других точек кривой, то порядок C' равен

$$n' = \frac{n-h}{i}.$$

n:31 **32. Бирациональные преобразования между двумя кривыми в многомерных пространствах, переводящие точки одной кривой, лежащие на гиперплоскости, в точки другой, тоже лежащие на гиперплоскости.** Обратимся теперь к рассмотрению в рамках теории линейных семейств связи между двумя кривыми, из которых одна является проекцией другой. Предположим, что 1) кривые C и C' состоят в бирациональном соответствии, то есть что пространство S_{d+1}, проектирующее произвольную точку кривой C из O, не проектирует еще какую либо другую точку этой кривой, и что 2) кривые C и C' имеют один и тот же порядок n, то есть что пространство O не пересекается кривой C. При бирациональном соответствии, имеющимся между кривыми C и C', линейному семейству g_n^{r-d-1}, вырезанному на кривой C' гиперплоскостями ее пространства (то есть подпространствами S_{r-d-2} пространства ω), отвечает линейное семейство g_n^{r-d-1}, вырезанное на кривой C гиперплоскостями, проходящими через пространство O; это последние вложено в большее семейство g_n^r, вырезанное на кривой C *всеми* гиперплоскостями пространства S_r. Отсюда:

Если кривая C' является проекцией кривой C, то при бирациональном соответствии между C' и C линейное семейство сечений кривой C'

гиперплоскостями соответствует семейству, вложенному в линейное семейство сечений кривой C гиперплоскостями.

Поскольку кривые C и C' имеют один и тот же порядок, линейное семейство на C, соответствующее семейству, вырезанному на C' гиперплоскостями, *полностью содержится* в семействе, вырезанном на кривой C гиперплоскостями; в противном же случае, то есть когда центр проектирования имеет с кривой C одну или несколько общих точек, первое семейство содержится во втором только *частично.*

Указанное выше свойство может быть обращено в след. смысле:

Предположим для начала, что обе кривые C и C', принадлежащие двум (различным или совпадающим) пространствам размерности r, состоят в таком бирациональном соответствии, что группам, вырезанным на кривой C гиперплоскостями, отвечают аналогичные группы на кривой C'. Тогда, как мы сейчас докажем, обе кривые проективны, то есть бирационльное соответствие, имеющиеся между ними, можно продолжить до коллиниации между двумя пространствами, которым принадлежат кривые.

Обозначим пространства, которым принадлежат кривые C и C', как Σ и Σ', тогда каждая гиперплоскость пространства Σ отвечает одной и только одной гиперплоскости пространства Σ', именно той, которая вырезает на кривой C' группу, соответствующую группе точек пресечения кривой C с заданной плоскостью пространства Σ; это замечание справедливо и в обратном направлении. Поэтому соответствие между точками этих кривых задает взаимно однозначное соответствие между гиперплоскостями пространств Σ и Σ'.

Рассмотрим теперь в пространстве Σ линейная ∞^{r-h-1}-система гиперплоскостей, то есть систему всех гиперплоскостей, проходящих через заданное пространство S_h $(h \geq 0)$; обозначим эту систему через H. Она вырезает на кривой C линейное семейство, отвечающее линейному семейству, которое вырезано на кривой C' гиперплоскостями и имеет размерность $r - h - 1$. Поэтому линейной системе H отвечает в пространстве Σ'

алгебраическая система H' гиперплоскостей, обладающая тем свойством, что через $r-h-1$ произвольным образом выбранных точек кривой C' проходит *одна единственная* гиперплоскость системы. Отсюда следует, что H' – тоже линейная система. Чтобы увидеть это, достаточно доказать, что через $r-h-1$ произвольных точек пространства Σ' проходит одна единственная гиперплоскость семейства H'.[57]

Выберем на кривой C' $r-h-2$ точек произвольным образом и рассмотрим ∞^1-систему гиперплоскостей системы H', проходящих через эти точки. Через еще одну точку, выбранную на кривой C' произвольным образом, проходит одна единственная гиперплоскость этой ∞^1-системы, а это может произойти в двух случаях: или через произвольную точку пространства Σ' проходит одна единственная гиперплоскость этой ∞^1-системы и, следовательно, эта последняя является пучком, или через произвольную точку пространства Σ' проходит несколько гиперплоскостей этой системы и тогда кривая C' неизбежно является частью *огибающей* (inviluppo) системы H'. Во втором случае получается, что, в силу известного дифференциального свойства, гиперплоскость, пробегающая H', касается кривой C' в подвижной точке, а отсюда следует в силу соответствия между кривыми C' и C, что аналогичным свойством обладает гиперплоскость, пробегающая H, и кривая C. Но это противоречить теореме, доказанной в конце Nr. 30. Таким образом, возможен только первый случай.

Выберем теперь произвольным образом $r-h-3$ точек на кривой C' и еще одну точку вне кривой C'. По предыдущему, ∞^1-система, образованная всеми гиперплоскостями системы H', проходящими через фиксированные точки, обладает тем свойством, что произвольным образом выбранную точку на кривой C' проходит одна единственная гиперплоскость системы. Тем же приемом, что и выше, мы можем доказать. что рассматриваемая система является именно пучком. Продолжая этот процесс дальше, увидим,

[57]Фактически, мы должны употребить здесь расширение предложения, доказанного в Nr. 7 для алгебраических систем кривых, на алгебраические системы форм (собственно говоря, на системы линейных форм, то есть гиперплоскостей), см., напр., Bertini, Introduzione и т.д., стр. 222. – Автор.

что гиперплоскости системы H', проходящие через $r-h-2$ произвольных точек пространства Σ', образует пучок, и что, следовательно, система H' должна быть линейной.

Их сказанного следует, что при взаимно однозначном соответствии между гиперплоскостями пространств Σ и Σ' линейные системы гиперплоскостей одного пространства переходят в линейные системы гиперплоскостей другого. Поэтому оно переводит точку, которую можно рассматривать как носитель (sostegno, Träger) линейной ∞^{r-1}-системы, в точку, прямую (носитель линейной ∞^{r-2}-системы) – в прямую, плоскость – в плоскость, и т.д. Отсюда следует, что взаимно однозначное алгебраическое соответствие, имеющийся между точками обеих пространств, является *коллиниацией*.[58]

Вернемся теперь к рассмотрению общего случая.

Допустим, что могут быть заданы две кривые C и C', принадлежащие пространствам S_r и $S_{r'}$ $(r' < r)$, между которыми имеется такое бирациональное соответствие, что группам, вырезанным на кривой C' гиперплоскостями пространства $S_{r'}$, на кривой C отвечают группы, которые (частично или целиком) принадлежат семейству гиперплоских сечений этой кривой. Для определенности, будем считать, что кривая C имеет порядок n, а кривая C' – порядок $n-i$.

Семейство $g^{r'}_{n-i}$ на C, отвечающее семейству гиперплоских сечений кривой C', устроено таким образом, что гиперплоскости пространства S_r, проходящие через одну, выбранную произвольным образом его группу, образуют ∞^h-систему $(h \geq 0)$. Выберем в пространстве S_r произвольным образом подпространство S_{h-1}, тогда r' точек кривой C будут фиксировать *одну* группу семейства $g^{r'}_{n-i}$ и через них будет проходить *одна единственная* проходящая еще и через пространство S_{h-1} гиперплоскость S_{r-1}. Гиперплосоксти S_{r-1} этой системы (звезды) (S_{h-1}), проходящие через группы семейства $g^{r'}_{n-i}$, образуют систему, обладающую тем свойством, что через r' произвольных точек кривой C проходит одна и только одна ее гиперплос-

[58] Bertini, Introduzione и т.д., стр. 45, Nr. 4.

кость. При помощи размышления, повторяющего в существенном предыдущее, можно придти к заключению о том, что эта $\infty^{r'}$-система пространств S_{r-1} линейная, то есть что она состоит из гиперплоскостей, проходящих через некоторое пространство $S_{r-r'-1}$ (это последнее, конечно, содержит введенное выше пространство S_{h-1}). Это пространство $S_{r-r'-1}$ пересекает кривую C в i точках, так как каждая проходящая через них гиперплоскость должна пересекать кривую C только в $n-i$ подвижных толчках.

Заметим еще, что семейство, вырезанное на кривой C' гиперплоскостями, не может быть составлено из инволюции, поэтому и соответствующее ему семейство, вырезанное на кривой C гиперплоскостями $\infty^{r'}$-системы (за вычетом неподвижных точек), не может быть составным. Следовательно, кривая C однозначно проектируется из пространства $S_{r-r'-1}$ на подпространство $S_{r'}$ пространства S_r. Таким образом, мы получим кривую C_1, бирационально эквивалентную C и C', такую, что сечения гиперплоскостями кривых C_1 и C' соответствуют друг другу. Эти кривые, следовательно, коллинеарны.

Собирая все доказанное в этом Nr. вмести, имеем:

Если между двумя кривыми C и C' имеется такое бирациональное соответствие, что гиперплоским сечениям кривой C' отвечают такие группы, которые (частично или целиком) содержатся в семействе, вырезанном на кривой C гиперплоскостями, то кривая C' коллинеарна некоторой проекции кривой C. Если такие группы содержатся целиком в этом семействе, то проектирование производится из центра, который не пересекает кривую C, в противном случае, центр проектирования пересекает кривую C в одной или нескольких точках.

n:32 **33. Нормальные кривые.** Рассмотрим опять неприводимую алгебраическую кривую C порядка n, принадлежащую пространству S_r. Если семейство g_n^r, вырезанное на кривой C гиперплоскостями этого пространства, является полным семейством, то кривую C нельзя получить как проекцию кривой *того же порядка*, принадлежащей пространству большей размерности. В этом случае кривую C называют *нормальной*.[59]

Если же гиперплоскости пространства S_r вырезают на кривой C семейство g_n^r, которое не полно, то можно построить [нормальную] кривую порядка n, проекцией которой является кривая C. Мы докажем это утверждение, увеличивая размерность пространства на 1. Для начала рассмотрим семейство g_n^{r+1}, содержащее рассматриваемое и, быть может, полное. Возьмем вне пространства S_r точку O и поставим в проективное соответствие группам семейства g_n^{r+1} гиперплоскости пространства S_{r+1}, соединяющие точку O с пространством S_r, так, чтобы группам g_n^r, то есть гиперплоскостям пространства S_r, отвечали именно те пространства S_r, которые проектируются в них из O. Это всегда возможно, поскольку при задании соответствия можно распорядиться по своему усмотрению $r+2$ парами соответствующих элементов семейства g_n^{r+1} и системы гиперплоскостей пространства S_{r+1}.

Через точку P кривой C проходит ∞^r групп семейства g_n^{r+1}, образующих некоторое линейное семейство; ему отвечает точка P_0 пространства S_{r+1} – носитель соответствующих этим группам гиперплоскостей. Поскольку g_n^{r+1} – простое (а мы, напомним, предполагаем, что таково уже семейство g_n^r), при движении точки P точка P_0 описывает некоторую алгебраическую кривую C_0, порядок которой должен быть равен n , поскольку она пересекается с гиперплоскостями своего пространства в том же числе подвижных точках, сколько подвижных точек имеет группа семейства g_n^{r+1} (см. Nr. 28). Вспомним теперь, что группы семейства g_n^r отвечают пространствам S_r, проходящим через одну и ту же точку O, поэтому C является проекцией кривой C_0 из центра O.

Если и кривая C_0 не является нормальной, то есть если семейство g_n^{r+1} не полно, то тем же путем можно построить в пространстве S_{r+2} кривую C_1 порядка n, проекцией которой из некоторой точки O_1 является кривая C_0.

[59]В нем переводе здесь прибавлено, что в S_3 нормальными являются кривая третьего порядка и пространственная кривая четвертого порядка первого типа (пересечение двух поверхностей второго порядка); однако же кривая четвертого порядка второго типа не является нормальной, поскольку она является проекцией рациональной квартики в S_4. – Перев.

Проектируя же кривую C_1 из прямой OO_1 на первоначальное пространство S_r, получим кривую C.

Продолжая этот процесс, в итоге придем к следующему: Если полное семейство, содержащее g_n^r, имеет размерность $r + d$, то кривая C может быть представлена как проекция кривой того же порядка n из пространства S_{d-1} на первоначальное пространство S_r.

Поскольку алгебраическую кривую мы условились называть *нормальной*, если ее нельзя представить как проекцию некоторой кривой того же порядка, но принадлежащей пространству большей размерности, доказанное мы можем сформулировать так:

Для того, чтобы кривая была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы группы, вырезанные на ней гиперплоскостями, составляли полную систему.

n:33 **34. Приложение к рациональным кривым.** Применим теперь доказанные в прошлых номерах теоремы к рациональным кривым, то есть кривым на плоскости или в пространстве трех и более измерений, бирационально эквивалентным прямой.

Заметим для начала, что на прямой множества всех групп по n точек в каждой составляет систему g_n^n; эта система может быть вырезана, напр., системой всех кривых порядка n, лежащих в одной плоскости, содержащей заданную прямую. Отсюда следует, что на прямой не может существовать полного семейства g_n^r, размерность r которого была бы строго меньше его порядка n, так как в g_n^n содержаться все группы из n точек.

То, что сейчас было сказано о линейных семействах на прямой, верно и для линейных семейств на любой рациональной кривой, поскольку при бирациональных преобразованиях линейные семейства переходят в линейные семейства.

Но можно доказать и обратную теорему: кривая C должна быть рациональной, если на ней существует линейное семейство g_n^n.

Для начала заметим, что [это семейство] не может иметь неподвижных точек, ведь в противном случае их можно было бы исключить [из точек групп] и получить семейство, размерность которого была бы больше порядка, что невозможно (см. стр. 78). Семейство g_n^n не может оказаться и составным, ведь в противном случае группы семейства, проходящие через одну точку P кривой C, проходили бы еще и через другие точки $Q, R, \dots$, и следовательно, после исключения из этих групп неподвижных точек $P, Q, R, \dots$, они составляют семейство, размерность которого, именно $n-1$, больше порядка.

Поэтому в пространстве S_n можно построить кривую C' порядка n, состоящую с кривой C в таком бирациональном соответствии, что заданное семейство g_n^n соответствует гиперплоским сечениям кривой C'. Однако эта кривая C' бирационально эквивалентна прямой прямой, на которую ее можно спроектировать из пространства S_{n-2}, соединяющего $n-1$ точек кривой C', выбранных произвольным образом. В самом деле каждое пространство S_{n-1}, проходящее через указанное пространство S_{n-2}, пересекает кривую C' лишь в одной точке A (отличной от выбранных выше $n-1$ точек)и прямую u в одной единственной точке A', которые, стало быть, можно поставить друг друг в соответствие. Итого:

Линейное семейство на алгебраической кривой не может иметь размерность r, превышающую порядок n; порядок и размерность равны тогда и только тогда, когда кривая – рациональная.

И далее:

Если кривая C порядка n лежит в r-мерном пространстве S_r, то $r \leq n$, и равенство возможно тогда и только тогда, когда кривая C рациональна. Рациональная кривая порядка n, принадлежащая пространству S_r ($r < n$), всегда является проекцией нормальной кривой того же порядка, принадлежащей пространству S_n.

4 Род кривой

page:96

n:34 **35. Двойные и кратные точки семейства g_n^1.** Якобиева **группа семейства g_n^1, обладающего только двойными точками.** Рассмотрим на некоторой алгебраической кривой C линейное семейство g_n^1, не имеющее постоянных точек. Легко видеть, что произвольным образом выбранная группа этого семейства состоит из n различных точек.

В самом деле, семейство g_n^1 можно вложить бесконечным числом способов в простое семейство g_{n+m}^r, для построения которого достаточно образовать сумму семейства g_n с простым семейством g_m. Значит существует кривая C', состоящая с кривой C в таком бирациональном отношении, что семейству g_{n+m}^r отвечает семейство, вырезанное на C' гиперплоскостями. Но тогда семейству g_n^1 отвечает семейство, вырезанное на кривой C' пучком гиперплоскостей после удаления из него m постоянных, различных или совпадающих друг с другом точек, и следовательно, точки произвольной группы семейства g_n^1 должны быть отличны друг от друга (см. Nr. 30, стр. ??). [60]

Таким образом, имеется лишь конечное число групп семейства g_n^1, содержащих две или более совпадающих точек.

Точку, с которой совпадают две принадлежащие одной группе семейства g_n^1 точки, называют *двойной точкой* этого семейства; если же с ней совпадают три точки, то ее называют *тройной точкой*; в общем же случае такую точку называют *кратной точкой* семейства.

Тем же способом вводятся понятия двойной, тройной и, вообще, кратной точки линейной системы любой размерности.

Только относительно [введенного только что понятия] кратных точек линейной системы следует оговорить особо, что две или более точек, принадлежащие одной группе заданного семейства и совпадающие с одной и

[60] Аргументация представляется не вполне корректной. В упомянутой теореме из Nr. 30 речь шла о пучке с произвольным относительно кривой C' носителем O, в данном же случае изменение O даст другой пучок, содержащийся в g_{n+m}^r, то есть можно утверждать лишь, что произвольный пучок семейства, содержащего заданный пучок, обладает указанным свойством. – Перев.

той же точкой P несущей семейство кривой C, только тогда следует рассматривать как компоненты кратной точки, когда она принадлежит одной и той же ветви, имеющей своим началом точку P, то есть только тогда, когда группу, которой она принадлежит, можно считать предельным положением подвижной группы семейства, среди точек которой найдутся две
page:97 или более, стремящиеся к точке P и к тому же принадлежащие одной и той же ветви.

В самом деле, если кратность точки P в некоторой группе заданного семейства подсчитывать просто как число точек группы, совпадающих с точкой P, без оглядки на ветви, началом которых может быть точка P, то бирациональным преобразованием заданную кривую будет возможно перевести в такую, на которой проходящим через точку P ветвям отвечают ветви, имеющие разное начало, и поэтому кратность будет меняться при преобразованиях линейного семейства. Таким образом, понятие кратности точки в группе семейства будут не инвариантно относительно бирациональных преобразований. При сделанных выше предосторожностях, напротив, можно утверждать, что *при бирациональных преобразованиях кратная точка линейного семейства переходит в кратную точку той же кратности.*

Напр., если плоская кривая порядка n, имеющая в точке P простой узел, пересекается с пучком прямых, проходящих через точку P, то этот пучок вырезает на кривой семейство, произвольная группа точек которого имеет по две точки, совпадающие с точкой P, но эти точки в силу нашей договоренности следует считать различными. Только касательная к кривой в точке P вырезает группу с двойной точкой (или точкой большей кратности, если касательная имеют более высокий порядок касания с кривой), причем в этой группе имеется еще и простая точка, совпадающая с двойной.

Если же P – точка возврата, то произвольным образом выбранная прямая, проходящая через точку P, вырезает на кривой группу, имеющую двойную точку в P, и т.д.

В общем случае, семейство g_n^1 имеет только двойные точки и не имеет точек большей кратности. На плоской кривой порядка n с обычными особыми точками имеется, напр., семейство g_n^1, вырезанное пучком лучей, выходящих из произвольным образом выбранной на плоскости точки O, имеет только двойные точки и именно в точках касания касательных, проведенных к кривой из точки O.

Группу двойных точек семейства g_n^1 называют ЯКОБИевой группой этого семейства.

page:98

Эта ЯКОБИева группа обладает рядом важных для дальнейшего свойств, к изучению которых мы сейчас же и приступим.

Добавим к группам заданного семейства g_n^1, предполагая, что оно избавлено от неподвижных точек, m отличных друг от друга точек некоторой группы K. При этом мы для начала будем предполагать след.:

a) семейство $g_n^1 + K$ вложено в некоторое простое семейство g_{n+m}^2, не имеющее постоянных точек,

b) точки группы K отличны от двойных точек семейства g_n^1.

В качестве проективной модели нашей кривой можно взять плоскую кривую C порядка $n+m$, на которой сеть прямых вырезает семейство, прообразом которого является заданное семейство g_{n+m}^2. Образ семейства $g_n^1 + K$ в этом случае вырезается на кривой прямыми некоторого пучка, выходящими из точки O, лежащей на кривой и имеющей на ней кратность m. Но поскольку на первоначально заданной кривой точки группы K были различны между собой, точка O должна служит началом m (линейных) ветвей кривой C. При этом группы семейства, являющегося образом семейства g_n^1, образованы отличными от точки O точками пересечения прямых названного пучка с кривыми C, и поскольку в силу предположения b) среди этих групп не может найтись такой, которая бы имела двойную точку в O, то касательные прямые, проведенные в точке O к каждой из ветвей, касаются своей ветви именно с кратностью 2, то есть эти ветви имеют первый порядок и первый класс (см. Nr. 20, стр. 64).

Представим себе теперь семейство, являющиеся образом семейства $g_n^1 + K$, как предельное положение уже свободного от неподвижных точек семейства g_{n+m}^1, вырезанного на кривой C пучком прямых, выходящих из точки Q, лежащей вне кривой C, но стремящейся к точке O. Когда Q подходит к точке O достаточно близко, на каждой выходящей из точки O ветви *две* двойные точки подвижного семейства g_{n+m}^1 сколь угодно близко подходят к точке O, поскольку из точки, которая подходит сколь угодно близко к началу линейной ветви первого класса, можно провести две касательные к этой ветви. Отсюда:

page:99

Если семейство $g_n^1 + K$ рассматривается как предельное положение семейства, свободного от неподвижных точек, то Якоби*ева группа для $g_n^1 + K$ может быть получена путем добавления к* Якоби*евой группе семейства g_n^1 группы K, считаемой дважды.*

Замечание. Это предложение остается в силе, если простое и лишенное неподвижных точек семейство g_{n+m}, содержащее g_n^1+K, имеет размерность $r > 2$. В самом деле, тогда можно считать, что семейство g_{n+m} вырезается гиперплоскостями на кривой C порядка $n + m$, лежащей в пространстве S_r. Семейство g_n' вырезается на C гиперплоскостями, проходящими через некоторое пространство O размерности $r - 2$, проходящее через m точек, различных или совпадающих друг с другом, но в любом случае дающими начало m различным ветвям. Теперь остается заменить в предложенном выше доказательстве точку Q на пространство Q размерности $r - 2$, а касательные, проведенные из точек O, Q, – касательными, проходящими через точки O, Q. [61]

[61] У Леффлера это замечание существенно расширено.

Легко видеть, что условия a) и b) не являются необходимыми условиями справедливости этого утверждения. Если из этих двух условий верно только b), то тут могут представиться две возможности:

1a) Семейство $g_n^1 + K$ содержится в простом семействе g_{n+m}^r, лишенном неподвижных точек, но только при $r > 2$.

2a) Семейство $g_n^1 + K$ не содержится ни в каком простом семействе, размерность которого была бы ≥ 2.

В первом случае мы сразу приходим обратно к условию a). В самом деле, если мы сопоставим g_{n+m}^r семейство, которое на кривой C_1 порядка $n + m$, лежащей в пространстве S_r, вырезается гиперплосn:36 **36.** Якобиева **группа семейства g_n^1, имеющего точки любой кратности.**[62] До сего момента мы предполагали, что рассматриваемое семейство имеет только двойные точки. Обратимся теперь к общему случаю, когда свободное от неподвижных точек семейство g_n^1 обладает точками

костями, то образом $g_n^1 + K$ окажется семейство, вырезаемое на C_1 пучком гиперплоскостей; носитель этого пучка — пространство S_{r-2} — проходит через образ K. Рассмотрим теперь семейство g_{n+m}^2, вырезаемое гиперплоскостями, проходящими через произвольным образом выбранное в S_{r-2} пространство S_{r-3}. Это семейство уже удовлетворяет условию а), поскольку произвольным образом выбранное пространство S_{r-3} не имеет точек, общих с кривой C_1, и кривая C_1 проектируется из пространства S_{r-3} взаимно однозначно. В самом деле, если бы [каждое S_{r-1}, проходящее через S_{r-3} и неподвижную точку X кривой C_1, проходило бы непременно еще и через другие неподвижные точки этой кривой, то их пересечение] S'_{r-2}, проходящее через неподвижную точку X кривой C_1 и пересекающее пространство S_{r-2} вдоль S_{r-3}, пересекало кривую C_1 еще и в других точках, то должна была бы сама эта кривая лежать в гиперплоскости, соединяющей пространство S_{r-2} с точкой X.

Чтобы во втором случае показать, что сделанное утверждение остается в силе, прибавим к $g_n^1 + K$ некоторую другую группу H, составленную из μ точек, так, чтобы семейство $g_n^1 + K + H$ содержалось бы в некотором простом семействе $g_{n+m+\mu}^2$, лишенном неподвижных точек. Обозначив якобиевы группы семейств g_n^1, $g_n^1 + K$ и $g_n^1 + K + H$ соответственно как Ω, I и T, получим

$$T = \Omega + 2K + 2H,$$

и кроме того

$$I = \Omega + xK, \quad T = I + yH,$$

где x и y – неотрицательные целые числа. Отсюда

$$2K + 2H = xK + yH,$$

page:100 то есть $x = y = 2$.

Тем самым мы показали, что предположение а) не существенно для справедливости высказанного выше утверждения, теперь же мы хотим показать, что и можем освободиться и от предположения b). Предположим, что точка из группы K совпадает с двойной точкой семейства g_n^1. Рассмотрим группу K как предельное положение подвижной группы $\overline{K}$, не имеющей уже точек, общих с якобиевой группой Ω семейства g_n^1, тогда якобиева группа $\overline{I}$ подвижного семейства $g_n^1 + \overline{K}$ по предыдущему дается как

$$\overline{I} = \Omega + 2\overline{K};$$

поэтому предельное семейство $g_n^1 + K$ имеет в качестве якобиевой группы

$$J = \Omega + 2K,$$

как и в случае, когда Ω и K не имеют общих точек. Единственное отличие от предыдущего случая состоит в то, что точки, общие группам Ω и K, при подсчете I считаются три раза, в то время как раньше каждая точка группы Ω считалась только один раз.

– Перев.

[62] Здесь как и в немецком переводе этот Nr. перенесен сюда из конца раздела. – Перев.

произвольной кратности. Сколько раз следует считать ν-кратную точку семейства g_n^1 в ЯКОБИевой группе, то есть скольким двойным точкам она эквивалентна?

Рассмотрим на кривой C некоторое другое линейное семейство g_m^1, лишенное неподвижных точек и *имеющая только двойные точки*. Предположим, что семейства g_n^1 и g_m^1 не связаны таким особым образом, что группы семейств g_n^1 и g_m^1, проходящие через произвольным образом выбранную точку кривой C, неизбежно имеют еще и другую общую точку.

Поскольку оба эти линейные семейства представляют собой ∞^1-многообразия, то мы можем поставить им в соответствия два пучка прямых (P) и (Q) одной и той же плоскости π так, чтобы каждой группе семейства g_m^1 отвечал один луч, проходящий через точку P, а каждой группе семейства g_n^1 – луч, проходящий через точку Q.

Подвижной точке M кривой C тогда отвечает на плоскости π точка R, в которой пересекаются лучи, отвечающие группам семейств g_n^1 и g_m^1, проходящим через точку M; при движении точки M вдоль C соответствующая page:101 ей точка R описывает некоторую алгебраическую кривую f, бирационально эквивалентную кривой C. В самом деле, одному определенному положению точки M отвечает *одно* положение точки R, а обратное верно в силу сделанного выше предположения, по которому две проходящие через точку M группы не имеют, вообще говоря, других общих точек.

Приняв за гомологичные те лучи пучками (P) и (Q), которые отвечают группам, имеющим общую точку, мы зададим алгебраическое соответствие между пучками (P) и (Q) типа (n, m). Произвольным образом выбранный луч, проходящий через точку P, пересекает кривую f в точке P и еще в стольких точках, сколько имеется точек пересечению у этого луча с гомологичными ему лучами пучка (Q); обозначив как s – кратность точки P на кривой f, а порядок кривой f как x, получим

$$x = m + s.$$

Аналогично,

$$x = n + s',$$

где s' – кратность точки Q на кривой f.

Если, а мы можем это принять, прямая PQ в этом соответствии не является самосопряженным элементом (Koinzidenzelement), то ей, как элементу пучка (P) или (Q), отвечает в другом пучке m (соотв. n) отличных друг от друга лучей; но когда луч, вращаясь вокруг точки P (или Q), стремиться к предельному положению PQ, m (или n) подвижных точек, в которых этот луч пересекает кривую f, стремятся к точке Q (или P) по m (соотв. n) направлениям, различным между собой и отличным от PQ. Отсюда следует, что прямая PQ пересекает кривую f только в точках P и Q, но не касается кривой в этих точках. Это дает, что $x = s + s'$, откуда в силу двух предыдущих равенств сразу получаем

$$s' = m, \quad s = n, \quad x = m + n.$$

Кроме того, точка P – обыкновенная n-кратная точка кривой f, поскольку в этой точке имеется n различных касательных, гомологичных прямой PQ. Аналогично, Q – обыкновенная m-кратная точка.

Что же касается кратности пересечения кривой f с касательной t в точке
page:102 P, то очевидно, что она должна быть равна числу n, увеличенному на число лучей, отвечающих касательной t и совпадающих с прямой PQ. Но поскольку не ограничивая общности рассмотрения можно предположить, что один единственный луч совпадает с PQ (так случиться, если выбрать произвольным образом положения полюсов обоих пучков), то касательная t и кривая f имеют общими $n + 1$ точек [сливающихся с P]. Сказанное нетрудно перенести на остальные касательные в P и в Q. Итого: *f – кривая порядка $n + m$, имеющая в точках P и Q простые узлы порядков n и m соответственно, причем касательные в этих двух точках не имеют особых свойств (Berührungseigenschaften).*

Семействам g_m^1 и g_n^1 на кривой f отвечают семейства, вырезаемые пучками (P) и (Q). Поэтому мы получим группы семейства g_m^1, имеющие двойные точки, если найдем прямые, проходящие через точку P и пересекающие одну и ту же ветвь кривой f с кратностью 2; аналогично, мы получим группы семейства g_n^1, имеющие кратные точки, если проведем через точку Q прямые, имеющие с одной и той же ветвью кривой f пересечение, кратность которого больше 1.

Заметим, что *кривая f не может иметь ветвей, порядок которых был бы больше двух*, поскольку в противном случае семейство g_m^1, вырезаемое прямыми пучка (P), имело бы точки кратности > 2. Семейство g_{n+m}^1, вырезанное на кривой f прямыми, проведенными через произвольным образом выбранную точку O, следовательно, имеет только двойные точки.

Пусть теперь точка O стремится к точке Q по произвольным образом выбранному направлению. При этом движении ЯКОБИева группа семейства g_{n+m}^1 составлена из двойных точек групп: из m постоянных точек, сливающихся с точкой Q, предельного семейства g_{n+m}^1 и из ЯКОБИевой группы T семейства g_n^1. В этой ЯКОБИевой группе каждая точка R должна считаться столько раз, сколько в подвижном семействе g_{n+m}^1 имеется двойных точек, которые при стремлении O к Q переходят в точку R.

Допустим, точка R для семейства g_n^1 является ν-кратной $(\nu > 1)$, тогда прямая QR пересекается с *одной из ветвей* кривой f, начало которой лежит в точке R, с кратностью ν.

page:103 Здесь могут представиться два случая:

a) Эта ветвь является линейной, то есть первого порядка.

b) Эта ветвь имеем второй порядок.

В первом случае прямая QR касается ветви, и эта последняя оказывается $(\nu-1)$-го класса (см. Nr. 20, стр. 64); следовательно прямая QR является предельным положением для $\nu-1$ касательной, проходящих через подвижную точку O, т. е. точка R в группе T считается $\nu - 1$ раз .

Во втором случае точка R является двойной, если $\nu = 2$, и считается в группе T один раз; если же $\nu > 2$, то прямая QR является касательной к этой ветви и поэтому эта последняя имеет класс $(\nu - 2)$; это означает, что с прямой QR сливаются $\nu-2$ касательные, проходящие через точку O. Поэтому точка R является предельным положением для $\nu-2$ подвижных двойных точек семейства g^1_{n+m} и для одной неподвижной двойной точки этого семейства, то есть и в этом случае эта точка считается в группе T $\nu-1$ раз. Итого:

Точка, кратности ν для произвольного семейства g^1_n, считается за $\nu-1$ двойную точку в ЯКОБИ*евой группе этого семейства.*

Замечание. Если семейство имеет постоянные точки, то легко понять, как подсчитать их кратность в ЯКОБИевой группе. Из предельного перехода, который мы уже использовали в Nr. 35 (стр. 114), сразу получается след.:

Постоянная точка, кратности ν для всех групп семейства g^1_n и кратности $\nu+\mu$ для одной частной группы этой семейства, считается за $2\nu+\mu-1$ двойные точки.

n:35 **37.** ЯКОБИ**ево семейство заданного g^r_n. Фундаментальная теорема.** Приступим теперь к доказательству следующей теоремы:

ЯКОБИ*ева группы семейств g^1_n, принадлежащих одному и тому же семейству g^r_n, [линейно] эквивалентны.*

Предположим для начала, что семейство g^r_n простое [и что оно не имеет неподвижных точек].

Если $r=2$, то не ограничивая общности рассмотрения, мы можем тогда предполагать, что семейство g^2_n вырезано прямыми на плоской кривой C порядка n. Тогда ЯКОБИевы группы семейств g^1_n, вырезанных на кривой C всевозможными пучками прямых, то есть группы, образованные точками касания кривой с касательными, проведенными к ней из центров этих пучков, вырезаются на кривой, вне кратных точек, первыми полярами, полюсами которых служат всевозможные точки плоскости. Поэтому эти группы page:104 образуют семейство, вырезанное на этой кривой ее первыми полярами. [63]

[63]ЛЕФФЛЕР добавил здесь след. разъяснение.

Первая поляра для точки O ... проходит через каждую s-кратную точку кривой C (вкл. бесконечно близкие кратные точки) с кратностью $s-1$ и имеет на каждой ветвью порядка α, выходящей из кратной

Обратимся теперь к случаю $r > 2$, пока все еще предполагая, что семейство g_n^r просто. Тогда можно считать, что C – кривая порядка n в пространстве S_r, а группы семейства g_n^r вырезаются на ней гиперплоскостями. Выберем произвольным образом два пространства Σ_1 и Σ_2 размерности $r-2$ и используем их как носители двух пучков гиперплоскостей, вырезающих на кривой C два семейства g_n^1. Оба эти пространства пересекаются в общем случае по некоторому пространству S_{r-4}[64]; при этом легко построить третье пространство Σ_3 размерности $r-2$, пересекающееся с Σ_1 и Σ_2 по пространствам размерности $r-3$. Для этого можно взять вне S_{r-4} точку P_1 пространства Σ_1 и точку P_2 пространства Σ_2 и определить пространствоΣ_3 как соединяющее Σ_{r-4} с точками P_1 и P_2.

Семейства g_n^1, вырезанные пучками (Σ_1) и (Σ_3), содержатся в одном и том же семействе g_n^2, вырезанном на кривой гиперплоскостями, проходящими через пространство H, общее пространствам Σ_1 и Σ_3. Поскольку пространства Σ_1 и Σ_3, а следовательно, и H, были выбраны произльным образом, семейство g_n^2 является простым, следовательно, по доказанному выше их ЯКОБИевы группы эквивалентны. По тем же причинам эквивалентны ЯКОБИевы группы семейств, вырезанных пучками (Σ_2) и (Σ_3). Но
page:105 поскольку две группы, эквивалентные третьей, эквиваленты между собой, ЯКОБИевы группы семейств g_n^1, вырезанные на кривой гиперплоскостей, линейно эквивалентны.

Рассмотрим теперь случай, когда семейство g_n^r составлено при помощи инволюции γ_μ^1 порядка μ (см. № 27). Возьмем кривую Γ, точки которой состоят в бирациональном соответствии с группами γ_μ, и рассмотрим линейное семейство g_m^r $(m = \frac{n}{\mu})$ на Γ, соответствующее семейству g_n^r, заданному на кривой C. Семейству g_m^1, содержащемуся в g_m^r, отвечает семейство g_n^1,

точки, $\alpha - 1$ следующих друг за другом простых точек (*Verzweigungspunkte*.(См. NOETHER, Rationale Ausführung der Operationen usw. Math. Ann. **23**, 329 (1884).) После исключения $\sum s(s-1)$ пересечений, которые дают кратные точки, оставшиеся пересечения кривой C и названной поляры дают в точности ЯКОБИеву группу семейства g_n^1, вырезанного пучком (O), поскольку каждая точка кратности α этого семейства считается $(\alpha - 1)$ раз (см. Nr. 38, стр. 117). – Перев.

[64] См., напр., B. BERTINI, Introduzione и т.д., стр. 9.

содержащиеся в g_n^r, а ЯКОБИевой группе g_m^1 – часть ЯКОБИевой группы g_n^1, поскольку эта последняя содержит еще и двойные точки инволюции γ_μ.

Вспомним теперь, что по доказанному ЯКОБИевы группы семейств g_m^1, содержащихся в семействе g_m^r, эквивалентны, так как это семейство просто, и что соответствие типа $(1, \mu)$, имеющееся между кривыми Γ и C, переводит эквивалентные группы в эквивалентные. Поэтому эквивалентны и ЯКОБИевы группы семейств g_n^1, содержащихся в g_n^r.

[Рассмотрим, наконец, случай, когда заданное семейство g_n^r имеет некоторое число неподвижных точек, составляющих группу, которую мы обозначим как K; при этом мы будем повторять в этой группе каждую точку столько раз, какова ее кратность. Удалив группу K, мы получим семейство g_m^r без неподвижных точек, поэтому ЯКОБИевы группы содержащихся в нем семейств g_m^1 эквивалентны. ЯКОБИевы группы семейств g_n^1, содержащихся в g_n^r, получаются из ЯКОБИевых групп семейств g_m^1, содержащихся в g_m^r, путем добавления постоянной группы $2K$; следовательно, ЯКОБИевы группы семейств g_n^1 должны быть эквиваленты.]

Полное семейство, содержащее ЯКОБИевы группы семейств g_n^1, принадлежащих одному и тому же семейству g_n^r, называют ЯКОБИевым семейством этого семейства g_n^r. Если G – группа g_n^r, то само семейство удобно обозначать символом $|G|$ (стр. 78), а ее ЯКОБИево семейство – символом $|G_j|$.

Из теоремы, приведенной на стр. 113, без промедления следует следующая *фундаментальная теорема о* ЯКОБИ*евых семействах*:

Если $|A|$ и $|B|$ – линейные семейства на алгебраической кривой C, то
page:106 ЯКОБИ*ево семейство их суммы $|A+B|$ равно сумме* ЯКОБИ*его семейства одного из заданных семейств и удвоенного второго:*

$$|(A+B)_j| = |A_j + 2B| = |2A + B_j|.$$

n:37 **38. Род кривой.** Из фундаментальной теоремы сразу получается весьма приметное следствие.

Пусть n – порядок семейства $|A|$, m – порядок семейства $|B|$, x – порядок

$|A_j|$, а y порядок $|B_j|$. Тогда из равенства $|A_j + 2B| = |2A + B_j|$ сразу следует, что

$$x + 2m = y + 2n,$$

то есть

$$x - 2n = y - 2m.$$

Поэтому число

$$\mathrm{ord}\,|A_j| - 2\mathrm{ord}\,|A| = 2p - 2,$$

равно как и число

$$p = \tfrac{1}{2}\mathrm{ord}\,|A_j| - \mathrm{ord}\,|A| + 1,$$

не зависит от выбора линейного семейства $|A|$*, при помощи которого оно определено.*

Число p называют *родом* (genere) рассматриваемой *кривой.* К его важнейшим свойствам можно отнести след.:

a) *Оно не меняется при бирациональных преобразований кривой.*

b) *Оно является целым неотрицательным числом.*

Свойство a) доказать не трудно. Если две алгебраические кривые C иC' состоят в бирациональном отноешении, то линейному семейству g_n^1 на C отвечает некоторое линейное семейство g_n^1 на C', а ЯКОБИевой группе первого семейства – ЯКОБИЕева группа второго; следовательно, род C совпадет с родом кривой C', коль скоро эти числа могут быть вычислены при помощи переходящих друг в друга семейств.

В силу теоремы 2.2.1 Нетера (№ 19), произвольная алгебраическая кривая может быть бирациональным преобразованием переведена в плоскую кривую, имеющую только обыкновенные особые точки. Поэтому для вычисления рода заданной алгебраической кривой, достаточно указать способ
page:107 вычисления рода плоских кривых с обыкновенными особыми точками.[65]

Итак, пусть f – такая кривая, n – ее порядок, и пусть на ней имеется t обыкновенных кратных точек, а $s_1, \dots, s_t$ – их кратности. ЯКОБИева

[65] ЛЕФФЛЕР опускает здесь и далее условие обыкновенности особых точек. – Перев.

группа семейства g_n^1, вырезанного на кривой пучком прямых, проходящих через точку O, выбранную на плоскости произвольным образом, образована точками касания кривой и касательных, проведенных к ней из точки O. Поэтому число точек в ЯКОБИевой группе этого семейства совпадает с классом m кривой.

Класс кривой f можно вычислить, воспользовавшись первой полярой для O, которая проходит через s_i-ратную точку кривой f с кратностью $s_i - 1$ и имеет в этих точках касательные, отличные от касательных к кривой f.[66] Сказанное является обобщением теоремы из № 11: бесконечно малый сдвиг переводит кривую f в другую, имеющую $(s_i - 1)$-ую точку в s_i-ой точке кривой f, то есть в этой точке сливают $s_i(s_i - 1)$ пересечений этих кривых и т.д. – В итоге получается, что

$$m = n(n-1) - \sum_{i=1}^{t} s_i(s_i - 1)$$

откуда в силу

$$p = \tfrac{1}{2}m - n + 1$$

имеем

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{s_i(s_i-1)}{2}.$$

Из этой формулы сразу видно, что p – целое число.

Несколько проще доказать, что $p \geq 0$. В самом деле, число m по своей природе число неотрицательное, причем оно равно нулю только тогда, когда f сводится к прямой. Поэтому

$$n(n-1) - \sum_{i=1}^{t} s_i(s_i - 1) \geq 0,$$

откуда

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{s_i(s_i-1)}{2} \geq n - 1 \geq 0.$$

[66] См., напр., Bertini. Introd. Cap. 8, Nr. 10.

Поэтому если $n > 1$, то можно подобрать $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ параметров, задающих кривую порядка $n-1$, так, чтобы получить кривую D этого порядка, проходящую через каждую s_i-кратную точку кривой f с кратностью $(s_i - 1)$ и, кроме того, еще через

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{s_i(s_i-1)}{2}$$

простых точек кривой f. Но поскольку кривая f неприводима, она пересекает кривую D в $n(n-1)$ точках, поэтому верно

$$n(n-1) \geq \sum_{i=1}^{t} s_i(s_i-1) + \frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

откуда

$$(n-1)(n-2) \geq \sum_{i=1}^{t} \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

то есть $p \geq 0$.

Замечание. Если $p = 0$, то можно построить ∞^1 кривых D порядка $n-1$, проходящих через s_i-кратные точки кривой f с кратностью $s_i - 1$ и, кроме того, еще через

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum_{i=1}^{t} \frac{s_i(s_i-1)}{2} - 1 = 2n - 3$$

page:108 простых точек кривой f. Каждая такая кривая D пересекает кривую f помимо этих неподвижных точек еще в одной точке, так как

$$n(n-1) - \sum_{i=1}^{t} s_i(s_i-1) - (2n-3) = 1.$$

Поэтому точки кривой f могут быть взаимно однозначно, а следовательно, и бирационально, связаны с кривыми построенного [линейного] пучка, то есть могут быть представлены как функции параметра. Это означает, что кривая f является рациональной. Верно и обратное: всякая рациональная кривая бирационально эквивалентна прямой, и поэтому ее род равен нулю.

Итого: *среди неприводимых алгебраических кривых рациональные можно охарактеризовать тем, что их род равен нулю.*

[Использованный выше способ введения рода кривой и понятия ЯКОБИевого семейства в существенных чертах был предложен ЭНРИКЕСОМ (Enriques), см. Boll. di bibl. e storia delle matematiche **2**, 76 (1899) и Torino Atti **37**, 19 (1901), где можно найти и обобщение этого способа на поверхности . См. также SEVERI, Palermo Rend. **17**, 32 (1902).]

5 Фундаментальная теорема НЕТЕРА и ее приложения в теории линейных семейств

5.1 Теорема о $Af + B\varphi$

p:5:1

n:38 **39. Теорема о $Af + B\varphi$ для простого случая.** Пусть на плоскости заданы две кривые

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x_0, x_1, x_2) = 0$$

порядков m и n соответственно. Обозначим как $\mathfrak{P}$ совокупность общих точек этих кривых; кратность точки P из этого множества относительно первой кривой будем обозначать как $r(P)$ и как $s(P)$ относительно второй. Рассмотрим пока простейший случай, когда все касательные к кривой f в каждой из точек $\mathfrak{P}$ отличны от касательных к кривой ψ в той же точке; при этом будем говорить, что кривые имеют только простые пресечения. В этом случае кривые f и φ имеют заведомо лишь конечное число общих точек: если бы они имели общую кривую, то в каждой ее точке они против нашего предположения бы имели одинаковые касательные.

Теорема, которую мы хотим сейчас доказать и которую в дальнейшем будем кратко называть «теоремой о $Af + B\varphi$», состоит в следующем:

th:Af+Bp **Теорема** НЕТЕРА **о $Af + B\varphi$.** *Если кривые $f = 0$ и $\varphi = 0$ имеют только простые пресечения, то уравнение алгебраической кривой порядка l, проходящей через каждую точку P множества $\mathfrak{P}$ с кратностью, равной как минимум $r(P) + s(P) - 1$, неизбежно имеет вид*

$$Af + B\varphi = 0,$$

где A и B алгебраические формы переменных x_0, x_1, x_2 порядков $l-m$ и $l-n$ соответственно. Кроме того, формы A и B всегда можно выбрать таким образом, чтобы кривые $A=0$ и $B=0$ проходили через каждую точку P из $\mathfrak{P}$ с кратностью как минимум равной $s-1$ и $r-1$ соответственно.

Замечание. Литература, посвященная теореме Нетера, играющей центральную роль в теории линейных семейств Брилля и Нетера, весьма обширна. [Сам Нетер доказал эту теорему сначала для случая простых пересечений в Math. Ann. **2**, 314 (1870), общий случай был рассмотрен им позже в Math. Ann. **6**, 351 (1873).] Библиографические указания можно найти в заметке Бертини «Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre»[67], [а также в статье Берцолари в «Энциклопедии математических наук»[68]]. Теорема Нетера может быть распространена на
page:114 произвольное число форм произвольного числа переменных[69].

Основная идея предложенного ниже доказательства восходит к доказательству Севери упомянутого выше обобщения, как и к замечанию Скотта[70], где все же доказательство изложено менее просто. В № 42 мы увидим, что этот же способ позволяет доказать теорему о $Af+B\varphi$ при более общих предположениях.

n:39 **40. Доказательство теоремы о $Af+B\varphi$ для простого случая.** Доказательству предпошлем лемму:

Лемма. *Пусть на плоскости заданы отличные друг от друга точки $P_1, P_2, \ldots, P_k$, то $\sum\limits_i \frac{(t_i+1)t_i}{2}$ линейных условий, которым следует подчинить коэффициенты уравнения алгебраической кривой порядка l с тем, чтобы она имела в точке P_i кратность t_i, линейно независимы, если*

[67] Bertini. Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre. Ist. Lomb. Rend. (2) **24**, 1095 (1891).

[68] Encyklopädie der math. Wissenschaften. Bd. III C 4. Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven (L. Berzolari), S. 406.

[69] См. замечания Севери в Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{11}^1$, 105 (1902) и Torino Atti **41**, 205 (1905); там же (стр. 224) находится заметка Торелли (R. Torelli) о том же предмете. См. также J. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen, Leipzig 1903, стр. 385 и сл.

[70] Ch. A. Scott. A proof of Noether's fundamental Theorem. Math. Ann. **52**, 593 (1899).

$l \geq t_1 + t_2 + \ldots t_k - 1$. [71]

Для случая $k = 1$ и $l \geq t_1 - 1$ сказанное хорошо известно и легко доказуемо: если поместить начало координат в точку P_1, то условия, накладываемые на коэффициенты уравнения кривой с тем, чтобы точка P_1 была бы t_1-кратной, сводятся к требованию обращения в нуль всех коэффициентов при членах степени ниже t_1, а эти условия, очевидно, линейно независимы.

Пусть теперь $k = 2$ и $l \geq t_1 + t_2 - 1$. По предыдущему, для того, чтобы кривая порядка $l - t_2$ проходила через точку P_1 с кратностью t_1, ее коэффициенты нужно подчинить $\frac{(t_1+1)t_1}{2}$ линейно независимых условиям. Аналогично, для того, чтобы кривая порядка t_2 проходила через точку P_2 с кратностью t_2, ее коэффициенты нужно подчинить $\frac{(t_2+1)t_2}{2}$ линейно независимым условиям, а значит, можно построить и кривую порядка t_2, удовлетворяющую в точке P_2 первым $\frac{(t_2+1)t_2}{2} - 1$ из этих условий, но не последнему. Объединив эту кривую с рассмотренной выше кривой порядка $l - t_2$, получим кривую порядка l, удовлетворяющую всем $\frac{(t_1+1)t_1}{2} + \frac{(t_2+1)t_2}{2}$ условиям прохождения точек P_1 и P_2 с указанными кратностями, кроме последнего условия. Тем самым доказано, что это условие не является следствием предыдущих, а значит, теорема установлена и для рассматриваемо-
page:115 го случая. Этот процесс, очевидно, может быть продолжен для $k = 3, 4$ и т. д.

Обратимся теперь к доказательству теоремы о $Af + B\varphi$ для того случая,
page:110 когда порядок l кривой достаточно велик.

Кривые, заданные уравнением

$$Af + B\varphi = 0,$$

в котором $A = 0$ и $B = 0$ – уравнения двух подвижных кривых, удовлетворяющих некоторому числу линейных условий: первая проходит через каждую точку $\mathfrak{P}$ с кратностью $s - 1$, а вторая – с кратностью $r - 1$, очевидно, составляют некоторую линейную систему Σ, поскольку переменными параметрами в уравнении $Af + B\varphi = 0$ являются коэффициенты форм A и B,

[71] В оригинале эта лемма, вмести со своим обобщением, вынесена в отдельное дополнение. – Перев.

связанные некоторым числом *линейных* уравнений, выражающих поведение кривых A и B в общих точках кривых f и φ. Подсчитаем размерность этой системы Σ.

На первый взгляд кажется, что для отыскания размерности можно просто подсчитать число коэффициентов, остающихся произвольными в уравнении $Af + B\varphi = 0$ и уменьшить это число на 1. Но такой подход основан на предположении, что каждая кривая Σ соответствует *одному единственному* уравнению рассматриваемого вида (с точностью до мультипликативной константы). Если же каждая кривая Σ может быть представлена в виде $Af + B\varphi = 0$ ∞^i различными способами, то чтобы подсчитать искомую размерность следует число произвольных коэффициентов в уравнении $Af + B\varphi = 0$ уменьшить на $i + 1$ единиц. Поэтому мы сначала должны выяснить, может ли соответствовать одной кривой из Σ несколько уравнений рассматриваемого вида, различающиеся не только на постоянный множитель.

Пусть

$$Af + B\varphi = 0 \quad \text{и} \quad A'f + B'\varphi = 0$$

два уравнения, представляющие одну и ту же кривую, тогда, с точностью до постоянного множителя, должно выполняться равенство

$$Af + B\varphi \equiv A'f + B'\varphi$$

тождественно относительно переменных x_1, x_2, x_3. Отсюда следует, что

$$(A - A')f \equiv (B' - B)\varphi;$$

и поскольку полиномы φ и f не имеют общих множителей, коль скоро page:111 кривые $f = 0$ и $\varphi = 0$ не могут иметь общих компонент, полином $A - A'$ должен неизбежно делиться на φ, то есть должно быть верно

$$A - A' \equiv X\varphi,$$

где X – форма $l-m-n$ порядка. Подставляя это выражение в предыдущее тождество, имеем

$$B' - B \equiv Xf.$$

Итого:

$$A' \equiv A - X\varphi \quad \text{и} \quad B' \equiv B + Xf.$$

С другой стороны, какую бы форму X мы не взяли, кривые $A - X\varphi = 0$ и $B + Xf = 0$ проходят через точки $\mathfrak{P}$ как минимум с кратностями $s-1$ и $r-1$ соответственно, поэтому все представления кривой системы Σ, заданной уравнением $Af + B\varphi = 0$, даются равенством

$$(A - X\varphi)f + (B + Xf)\varphi = 0,$$

в котором коэффициенты формы X порядка $l - m - n$ можно менять произвольным образом. Итого: если $l \geq m + n$, каждую кривую системы Σ можно представить в виде $Af + B\varphi = 0$ ∞^i способами, где

$$i = \frac{(l - m - n + 2)(l - m - n + 1)}{2}.$$

Число произвольны коэффициентов в $Af + B\varphi = 0$ подсчитать не трудно: если l, а следовательно, $l - m$ и $l - n$, достаточно велики, то в силу леммы, доказанной в начале этого №, условия, которым подчинили выше кривые $A = 0$ и $B = 0$, линейно независимы. Следовательно, число произвольных коэффициентов в форме A равно

$$\frac{(l - m + 2)(l - m + 1)}{2} - \sum_{\mathfrak{P}} \frac{s(s-1)}{2},$$

а число произвольных коэффициентов в форме B равно

$$\frac{(l - n + 2)(l - n + 1)}{2} - \sum_{\mathfrak{P}} \frac{r(r-1)}{2},$$

то есть всего в форме $Af + B\varphi$ имеется

$$\frac{(l - m + 2)(l - m + 1)}{2} + \frac{(l - n + 2)(l - n + 1)}{2} - \sum_{\mathfrak{P}} \left[\frac{s(s-1)}{2} + \frac{r(r-1)}{2}\right]$$

переменных коэффициентов.

Поэтому, заметив, что

$$\frac{(l - m + 2)(l - m + 1)}{2} + \frac{(l - n + 2)(l - n + 1)}{2} = \\ \frac{(l - m - n + 2)(l - m - n + 1)}{2} + \frac{(l + 2)(l + 1)}{2} - nm$$

и

$$\frac{s(s-1)}{2}+\frac{r(r-1)}{2}=\frac{(r+s)(r+s-1)}{2}+rs,$$

page:112 размерность системы Σ можно записать как

$$\dim\Sigma=\frac{(l+2)(l+1)}{2}-1-nm-\sum_{\mathfrak{P}}\frac{(r+s)(r+s-1)}{2}+\sum_{\mathfrak{P}}rs.$$

Поскольку кривые f и φ имеют по предположению теоремы только простые пересечения, в силу теоремы Безу верно

$$\sum_{\mathfrak{P}}rs=nm,$$

поэтому размерность системы Σ можно переписать в виде

$$\dim\Sigma=\frac{(l+2)(l+1)}{2}-1-\sum_{\mathfrak{P}}\frac{(r+s)(r+s-1)}{2}.$$

Остается заметить, что этому же числу равна размерность линейной системы Σ' кривых порядка l, проходящих через каждую точку $\mathfrak{P}$ с кратностью $r+s-1$. Коль скоро, очевидно, система Σ содержится в Σ', то, по крайней мере при достаточно больших значениях l, системы Σ и Σ' совпадают, что и утверждается в теореме Нетера.

Для прочих значений l докажем теорему по индукции: предположим, что она верна для кривых порядка l, докажем ее для кривых порядка $l-1$.

Допустим, что прямая $x_0=0$ занимает относительно кривых $f=0$ и $\varphi=0$ произвольное положение, то есть что ни одна из точек $\mathfrak{P}$ не лежит на $x_0=0$, а ни форма f, ни φ не делятся на x_0; это предположение не ограничивает общности рассмотрения, поскольку сказанного всегда можно добиться линейным преобразование координат.

Пусть $g(x_0,x_1,x_2)=0$ – кривая порядка $l-1$, проходящая через каждую из введенных выше точек $\mathfrak{P}$ с кратностью $(r+s-1)$. Тогда кривая $x_0g=0$ имеет порядок l и имеет в точках $\mathfrak{P}$ ту же кратность, что и кривая $g=0$. Если утверждение теоремы доказано для кривых порядка l, то справедливо

page:113 следующее тождество:

$$x_0g(x_0,x_1,x_2)\equiv A(x_0,x_1,x_2)f(x_0,x_1,x_2)+B(X_0,x_1,x_s)\varphi(x_0,x_2,x_3),\quad (32)$$ eq:38:1

где $A = 0$ и $B = 0$ – кривые, проходящие через каждую из точек $\mathfrak{P}$ с кратностями $s-1$ и $r-1$ соответственно. Полагая в равенстве (32) $x_0 = 0$, имеем

$$A(0, x_1, x_2)f(0, x_1, x_2) + B(0, x_1, x_2)\varphi(0, x_1, x_2) \equiv 0, \tag{33}$$

eq:38:2

откуда следует, что не равная тождественно нулю форма $\varphi(0, x_1, x_2)$ является делителем произведения $A(0, x_1, x_2)f(0, x_1, x_2)$. Но $\varphi(0, x_1, x_2)$ и $f(0, x_1, x_2)$ не имеют общих множителей, поскольку иначе некоторые из точек $\mathfrak{P}$ лежали бы на прямой $x_0 = 0$. Значит, должно быть верно

$$A(0, x_1, x_2) \equiv A_0(x_1, x_2)\varphi(0, x_1, x_2), \tag{34}$$

eq:38:3

откуда

$$A(x_0, x_1, x_2) \equiv A_0(x_1, x_2)\varphi(x_0, x_1, x_2) + x_0 A_1(x_0, x_1, x_2), \tag{35}$$

eq:38:4

где A_1 – некоторая форма порядка $l - m - 1$.

Сравнивая (33) с (34), имеем

$$B(0, x_1, x_2) + A_0(x_1, x_2)f(0, x_1, x_2) \equiv 0,$$

откуда

$$B(x_0, x_1, x_2) \equiv -A_0(x_1, x_2)f(x_0, x_1, x_2) + x_0 B_1(x_0, x_1, x_2), \tag{36}$$

eq:38:5

где B_1 – некоторая форма порядка $l - n - 1$. Подставив выражения (35) и (36) для форм A и B в тождество (32), получим

$$x_0 g \equiv x_0 A_1 f + x_0 B_1 \varphi$$

или

$$g \equiv A_1 f + B_1 \varphi.$$

Это означает, что форма g порядка $l - 1$ может быть представлена как линейная комбинация форм f и φ. При этом кривые $A_1 = 0$ и $B_1 = 0$, как видно из тождеств (35) и (36), проходят через каждую точку P как минимум с кратностью $s - 1$ и $r - 1$ соответственно.

Тем самым доказательство теоремы 39 Нетера полностью завершено.

n:41 **41. Теорема о $Af + B\varphi$ в общем случае.**

Лемма, на которой было основано доказательство теоремы о $Af + B\varphi$, допускает существенное обобщение. Начнем с того, что *условия, которым следует подчинить коэффициенты уравнения алгебраической кривой порядка l с тем, чтобы она имела в точке P кратность t, а в точках $P_1, P_2, \ldots$, лежащих в окрестности первого порядка точки P, – кратности $t_1, t_2, \ldots$, линейно независимы, если $l \geq t_1 + t_2 + \ldots t_k - 1$.*

Для доказательства переведем исходную плоскость π, в которой заданы особые точки, общим квадратичным преобразованием с фундаментальной точкой в P (другие две фундаментальные точки обозначим как Q и R) в плоскость π'. фундаментальные точки в этой плоскости обозначим как P', Q', R'. Подвижная кривая порядка $l \geq t + \sum t_i - 1$, имеющая в P точку кратности t (и, следовательно, удовлетворяющую $\frac{(t+1)t}{2}$ линейно независимым условиям), переходит в кривую порядка $2l - t$, имеющую в фундаментальных точках Q', R' точки кратности $l - t$, в точке P' – точку кратности l, а, кроме того, пересекающую прямую $Q'R'$ еще в t подвижных точках (см. №. 17). Мы утверждаем, как всегда в предположении $l \geq t + \sum t_i - 1$, что *отличные друг от друга* точки $P'_1, P'_2, \ldots$ с кратностями $t_1, t_2, \ldots$ накладывают на кривую порядка $2l - t$, имеющую в P' точку кратности l, а в Q' и R' точки кратности $l - t$, всего $\sum \frac{(t_i+1)t_i}{2}$ независимых условий.

[В самом деле, если $l > t + \sum t_i$, и если мы вспомним, что $t \geq \sum t_i$ (см. Nr. 18), то мы можем составить кривую порядка $2l - t$, удовлетворяющую последним условиям, следующим образом:

$$P'Q'^{l-t} \cup P'R'^{\sum t_i} \cup a^{t - \sum t_i} \cup b^{l - t - \sum t_i} \cup \varphi.$$

page:116 Здесь выражение $P'Q'^{l-t}$ обозначает прямую $P'Q'$, взятую $(l-t)$ раз и т.д., a и b – две взятые произвольным образом прямые, проходящие через точку P' и R' соответственно, а φ – произвольная кривая порядка $\sum t_i$. Если же $l = t + \sum t_i - 1$, то можно составить удовлетворяющую этим условиям кривую порядка $2l - t$ так:

$$P'Q'^{l-t} \cup P'R'^{\sum t_i - 1} \cup a^{t - \sum t_i + 1} \cup \varphi,$$

где a – произвольным образом выбранная прямая, проходящая через точку P', а φ – произвольным образом выбранная кривая порядка $\sum t_i - 1$. Поскольку в обоих случаях порядок φ больше или равен $\sum t_i - 1$, то точки $P'_1, P'_2, \ldots$ с кратностями $t_1, t_2, \ldots$ накладывают на кривую φ всего $\sum \frac{(t_i+1)t_i}{2}$ независимых условий, откуда и следует доказываемое утверждение.]

Если среди базовых точек, сливающихся с точкой P, помимо $P_1, P_2, \ldots$ нужно бы взять еще точку $P_{1,2}$, лежащую в окрестности первого порядка точки P_1, то при помощи общего квадратичного преобразования с фундаментальной точкой в P этот случай можно свети к уже рассмотренному и тем самым расширить область применения изложенного приема. Случай двух и более групп точек, бесконечно близких к различным точкам плоскости можно свести к случаю одной группы тем же приемом, который был использован выше для доказательства теоремы при $k = 2$. Таким образом, лемма, на которой было основано доказательство теоремы о $Af + B\varphi$, остается справедливой, *если некоторые из точек P составляют группы бесконечно близких точек.*

Сказанное позволяет значительно расширить область применения теоремы о $Af + B\varphi$: при ее доказательстве мы использовали предположение о том, что кривые $f = 0$ и $\varphi = 0$ пересекаются просто, лишь трижды: когда утверждали, что множество $\mathfrak{P}$ точек пересечения конечно (что можно выставить в качестве нового условия), что требование прохождения кривой достаточно большого порядка через точки $\mathfrak{P}$ с кратностями q накладывает на ее коэффициенты

$$\sum_{\mathfrak{P}} \frac{q(q+1)}{2}$$

линейно независимых условий (что, в силу только что доказанного обобщения леммы, верно и без предположения об отсутствии в $\mathfrak{P}$ бесконечно близких точек), и когда писали

$$\sum_{\mathfrak{P}} rs = nm,$$

что верно в силу обобщения теоремы Безу (см. Nr. 19). Поэтому *теорема*

Нетера *справедлива даже тогда, когда кривые* $f = 0$, $\varphi = 0$, *не имеющие общей компоненты, в каждой своей точке пересечения ведут себя произвольным образом, лишь бы рассматриваемая кривая, проходящая с кратностью* $r + s - 1$ *через все различные или бесконечно близкие точки,* page:120 *кратности* r *для* $f = 0$ *и* s *для* $\varphi = 0$.[72] [73]

5.2 Теорема о вычетах и построение линейных семейств при помощи сопряженных кривых

n:41 **42. Линейные семейства, вырезаемые на плоской кривой всеми сопряженными к ней кривыми заданного порядка.** Из теоремы Нетера можно получить важное для дальнейшего следствие, касающиеся кривых, *сопряженных* к кривой $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, обладающей какими угодно особенностями. Кривая же называется сопряженной к f, если она проходит через каждую s-кратную точку кривой f как минимум с кратностью $s - 1$; при этом, само собой разумеется, что учитываются не только отличные друг от друга, но и бесконечно близкие кратные точки. Это следствие гласит:

Сопряженные кривые заданного порядка l *вырезают на кривой* f *полное линейное семейство* (при условии, что неподвижные точки пересечения, совпадающие с кратными точками кривой f, не считаются за точки групп этого семейства).

Чтобы доказать это утверждение, обозначим как g_n^r линейное семейство,

[72] Севери впервые указал на это обобщение теоремы Нетера в заметке, опубликованной в Padova Atti, **24**, стр. 137 и сл. (1908).

[73] В немецком переводе далее следует обширное отступление о распространении этой теоремы на случай т.н. кажущихся кратностей. Дело в том, что в дальнейшем теорема используется для случая, когда φ – подвижная кривая некоторого пучка. Если кривые этого пучка имеют, скажем, две неподвижные бесконечно близкие точки P и P_1, лежащие на кривой f, то для произвольной кривой пучка проходит через них с кратностями 1 и 1, но имеется и особенная кривая φ_0 этого пучка, которая имеет двойную точку в P, то есть проходит через P и P_1 с кратностями 2 и 0 соответственно. Леффлер сообщает, что 2 и 0 называют действительными (tatsächlich) кратностями, а 1 и 1 – кажущимися кратностями (scheinbaren) для кривой φ_0 (их не следует путать с виртуальными (virtuell) кратностями), и что теорема о $Af + B\varphi$ остается верной, если оперировать кажущимися кратностями для φ. – Перев.

вырезаемое сопряженными кривыми порядка l на кривой f, а как $g_n^{r'}$ – полное семейство, содержащее или совпадающее с g_n^r. Мы должны доказать, что оба эти семейства именно совпадают, то есть что $r = r'$. Пусть уравнение

$$\alpha_0\psi_0 + \ldots \alpha_{r'}\psi_{r'} = 0 \tag{37}$$

eq:5:2:

задает линейную систему, вырезающую на f семейство $g_n^{r'}$. Можно сразу принять, что эта система состоит из сопряженных кривых, ведь в противном случае можно было бы добавить ко всем кривым этой системы постоянную кривую, сопряженную к f.

Обозначим произвольную группу семейства g_n^r как G и покажем для начала, что она удовлетворяет двум следующим условиям:

a) Она не имеет кратных точек.

b) Она не содержит базовых точек системы (37).

Оба эти свойства получаются из того обстоятельства, что g_n^r не имеет постоянных точек: свойство b) следует из это прямо, а справедливость свойства a) становится очевидной, если вспомнить сказанное в начале № 35.

Далее, обозначим как G' произвольную группу семейства $g_n^{r'}$,

- как $\psi = 0$ – ту кривую системы (37), которая вырезает группу G,
- как $\varphi = 0$ – ту сопряженную кривую порядка l, которая проходит через группу G[74],
- как $\psi' = 0$ – ту кривую системы (37), которая вырезает группу G'.

page:121

В силу условий a) и b) кривая $\psi = 0$, хотя она и занимает в системе (37) *особое* (speziell) положение, пересекает кривую f с *теми же* кратностями, что и кривая ψ'. Поэтому кривая ψ проходит через базовые точки системы (37) с кажущимися кратносятми, равными действительным кратностям, с которыми через них проходит кривая ψ'. Теорему, доказанную в пред. №,

[74]Если l не меньше порядка кривой f, то через каждую группу G проходит бесконечно много сопряженных кривых порядка l.

можно применить к любой кривой, проходящей через точку кратности s для $f = 0$ и t для $\psi' = 0$ с кратностью $s + t - 1$ и содержащую группу G. Поскольку составная кривая $\psi'\varphi = 0$ обоим этим условиям удовлетворяет, ее уравнение можно записать в виде:

$$\psi'\varphi \equiv \varphi'\psi + \theta f; \tag{38}$$ eq:5:2:

причем кривая l-го порядка $\varphi' = 0$ проходит с кратностью как минимум равной $s - 1$ через каждую точку, имеющую кратность s для f и t для ψ' $(t \geq 1)$. Но поскольку кривая ψ' сопряжена к f, среди этих s-кратных точек f, лежащих на ψ' (имеющих кратность $t \geq 1$ на ψ'), имеются *все* кратные точки кривой f, и поэтому кривая φ' тоже сопряжена к f. Далее, эта кривая φ' проходит через группу G'. В самом деле, координаты точки группы G' удовлетворяют уравнениям $\psi'\varphi = 0$ и $\theta f = 0$, и поэтому и следующему из них уравнению $\varphi'\psi = 0$. Ни одна такая точка не может лежать на кривой ψ, поскольку в противном случае группы G и G' имели бы совместные точки, что противоречить условию, по которому семейство $g_n^{r'}$ не имеет неподвижных точек, итого: каждая точка G' лежит на кривой φ'.

Применим тождество (38) для $r' + 1$ независимых положений кривой $\psi' = 0$, именно

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_1 = 0, \ldots, \psi_{r'} = 0,$$

и обозначим как

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_{r'} = 0,$$

соответствующие им положения кривой $\varphi' = 0$, тогда получим

$$\varphi(\lambda_0\psi_0 + \cdots + \lambda_{r'}\psi_{r'}) = \psi(\lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_{r'}\varphi_{r'}) + \eta f;$$

при этом подвижные кривые

$$\lambda_0\psi_0 + \cdots + \lambda_{r'}\psi_{r'} = 0, \quad \lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_{r'}\varphi_{r'}$$

проходят через одну и ту же подвижную группу $\overline{G}$ семейства $r_n^{r'}$. Но кривая $\lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_{r'}\varphi_{r'} = 0$, коль скоро ее порядок равен l, кроме $\overline{G}$ не может иметь подвижных пересечений с f, поэтому линейная система сопряженных кривых l-го порядка

$$\lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_{r'}\varphi_{r'} = 0$$

page:122 вырезает на f вне кратных точек полное семейство $g_n^{r'}$. Отсюда получается, что $r' = r$ и, следовательно, что g_n^r – полное семейство.

Замечание 1. Для предложенного способа доказательства не нужно, чтобы семейство g_n^r не имело неподвижных точек, нужно лишь, чтобы выполнялись условия a) и b) для тех точек группы G, которые при движении группы *сами изменяются.* Поэтому теорема остается в силе, если семейство g_n^r $(r \geq 1)$ имеет неподвижную точку в однократной точке кривой.

Замечание 2. Предложенное доказательство теряет силу, если семейство g_n^r, вырезаемое сопряженными кривыми порядка l, имеет размерность $r = 0$, поскольку в этом случае условия a) и b), существенные для доказательства теоремы, не могут выполняться.

Но легко видеть, что в этом случае порядок l не может быть больше $m-2$ (m – порядок кривой f). В самом деле, для $l = m - 1$ $(m > 1)$ семейство g_n^r имеет размерность $r \geq 2$, поскольку оно содержит ∞^2 пересечений с первыми полярами, а при $l > m-1$ размерность должна быть еще больше, поскольку в качестве кривых системы можно взять в точм числе и кривые, компонентами которых являются сопряженные кривые $(m-1)$-го порядка.

Предположим теперь, что $l < m - 1$, напр., $l = m - 2$. По доказанному семейство, вырезаемое сопряженными кривыми $(m - 1)$-го порядка на кривой f, полно, поэтому (по № 25) тоже справедливо для того семейства, которое получится вне неподвижных точек сопряженных кривых $(m-1)$-го порядка, проходящих через m точек кривой f, лежащих на одной прямой. Но эти сопряженные кривые распадаются на на прямую, содержащую эти точки, и сопряженные кривые порядка $m - 2$; отсюда следует, что эти последние кривые вырезают на f полное семейство. Тем же путем можно рассмотреть случаи $l = m - 3$, $m - 4$, и т.д.

n:42 **43. Теорема об остатке.** Вспоминая сказанное в Nr. 25 из предыдущей теоремы срезу имеем:

Сопряженные кривые определенного порядка l, проходящие через группу постоянных точек кривой f, вырезают на кривой f вне кратных и неподвижных точек полное линейное семейство. Для того, чтобы построить полное семейство, содержащее заданную группу G точек кривой f, при помощи сопряженных кривых, можно поступить следующим
page:123 образом: возьмем натуральное число l столь большим, чтобы существовали сопряженные кривые порядка l, проходящие через точки группы G, и обозначим как H группу, которую вырезает на кривой f одна из проходящих через G сопряженных кривых l-го порядка помимо точек группу G и кратных точек кривой. Эта группа H является *вычетом* (Residuum) группы G относительно сопряженных кривых l-го порядка. Сопряженные кривые l-го порядка, проходящие через H, вырезают на f помимо фиксированных точек в точности семейство $|G|$.

Далее, мы имеем след.:

Любой вычет группы, принадлежащей заданному линейному семейству, относительно сопряженных кривых некоторого определенного порядка, является вычетом любой другой группе этого семейства относительно названных сопряженных кривых. [75]

Но это и есть *Теорема о вычете* Бриля и Нетера. Само это предложение имеет проективную форму, поскольку оно было основано на особой модели кривой f; в инвариантной форме мы получили менее общее (weniger umfassenden) утверждение, сформулированное в Nr. 25.

Замечание 1. Предложенное построение полных линейных семейств при помощи линейных систем сопряженных кривых годится и для се-

[75] Тут конфликт обозначений: сопряженные кривые одного порядка вырезают на кривой полное семейство $|A| = |G+H|$; по № 25 группа H – вычет группы A относительно $|G|$. Теперь автор ведет речь о вычете по G и говорит, что он зависит не от G, но только от $|G|$. Кто бы сомневался. Дело в другом: группы G и H называют вычетами друг друга, если существует сопряженная кривая, вырезающая на f группу $G+H$: теорема утверждает, что, если $G' \equiv G$ и $H' \equiv H$, то G' и H' тоже вычеты, то есть что существует сопряженная кривая, вырезающая $G' + H'$. – Перев.

мейств, снабженных неподвижными точками.

Если в исходную группу G были включены неподвижные точки конструируемого полного линейного семейства, скажем, образующие в G группу K, то сопряженные кривые l-го порядка, проходящие через вычет остаток H по G относительно сопряженных кривых названного порядка, имеют точки группы K в качестве неподвижных точек, поскольку точки этой группы не могут быть неподвижными для семейства $|G|$.

Замечание 2. На кривой f некоторое полное семейство вырезается сопряженными кривыми заданного порядка, проходящими через каждую s-кратную точку A кривой f с кратностью s. Если в частности мы рассмотрим кривые порядка m, составляющие вмести с f некоторую линейную систему, и если понимать под *характеристическим семейством* то, которое вне базисных точек на одной из кривых системы вырезается другими кривыми системы, то мы получим след. утверждение:

Характеристическое семейство полной линейной системы является
page:124 *полным семейством.*

n:43 **44. Размерность полного семейства. Каноническое семейство.** Найдет теперь размерность r линейного семейства, вырезаемого сопряженными кривыми l-го порядка на кривой f порядка m, предполагая, что она наделена только обыкновенными особыми точками Целесообразно разделить два случая.

1. Порядок l не меньше m, так что имеются сопряженные кривые, которые разлагаются на кривую f и остаток-кривую порядка $l - m$, не подчиненную никаким другим условиям.

2. Порядок l меньше m и поэтому в линейной системе не содержится сопряженных кривых, имеющих кривую f своей компонентой.

В первом случае размерность r семейства, вырезаемого на кривой f сопряженными кривыми l-го порядка, [размерность] множества сопряженных кривых придется уменьшить на число линейно независимых кривых, имеющих f своей компонентой. Обозначив как s кратности кратных точек кривой f, получим

$$r \geq \frac{l(l+3)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2} - \frac{(l-m)(l-m+3)}{2} - 1, \tag{39}$$ eq:5:2:

где знак равенства реализуется тогда, когда кратные точки кривой f налагают на сопряженные кривые l-го порядка независимые условия; так случится согласно лемме из № 40 при достаточно больших l.

Во втором случае размерность рассматриваемого линейного семейства равно размерности вырезающей его системы кривых (№ 23), то есть

$$r \geq \frac{l(l+3)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2}. \tag{40}$$ eq:5:2:

Заметим, что правая часть неравенства (39) переходит в правую часть неравенства (40), когда l равно $m-1$ или $m-2$, поэтому [можно считать, что] неравенство (39) справедливо при $l \geq m-2$, а неравенство (40) – при $l \leq m-3$.

Порядок n семейства, которое вырезает на кривой f сопряженные кривые l-го порядка вне ее кратных точек, [легко подсчитать, если вспомнить, что общее число точек пересечения кривой f и произвольной сопряженной кривой, собранных в кратных точках кривой f равно $\sum s(s-1)$], поэтому в обоих случаях верно

$$n = ml - \sum s(s-1).$$

page:125 Коль скоро род p кривой f, согласно № 38, дается формулой

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{s(s-1)}{2},$$

при $l \geq m-2$ верно

$$r \geq p - 2 + m(l-m+3), \tag{41}$$ eq:5:2:

а при $l = m-3-\alpha (\alpha \geq 0)$ верно

$$r \geq p - 1 - m\alpha + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2}, \tag{42}$$ eq:5:2:

причем в обоих случаях верно

$$n = 2p - 2 + m(l - m + 3). \tag{43}$$ eq:5:2:

Сравнивая неравенства (41) и (42) с равенством (43), имеем

$$r \geq n - p$$

при $l \geq m - 2$ и

$$r \geq n - p + 1 + \frac{\alpha(\alpha + 3)}{2}$$

при $l = m-3-\alpha$. В обоих случаях между размерность r, порядок n полного линейного семейства, вырезаемого сопряженными кривыми произвольного порядка на кривой f, и род p этой кривой связаны неравенством $r \geq n-p$.

Отсюда не трудно вывести след.: *для произвольной алгебраической кривой рода p между размерностью r и порядком n любой полного линейного семейства справедливо неравенство $r \geq n - p$.*

В самом деле, рассмотрим на кривой f произвольное семейство g_n^r, вырезанное сопряженными кривыми некоторого порядка l, проходящими через остаток H некоторой группы этого семейства. Пусть n' – число точек, входящих в группу H, тогда $n + n'$ – порядок семейства, вырезанного на f сопряженными кривыми l-го порядка, и поэтому размерность R этого семейства удовлетворяет неравенству

$$R \geq n + n' - p.$$

Поскольку группы семейства g_n^r получатся из групп семейства $g_{n+n'}^R$, если потребовать, чтобы эти последние содержали группу H, то есть путем наложение *максимум* n' независимых условий (именно, по одному на каждую точку группы), поэтому $r \geq R - n'$, откуда $r \geq n - p$.

Полное линейное семейство, которое вырезается на кривой f вне ее кратных точек сопряженными кривыми $(m-3)$-го порядка, называется *каноническим семейством* кривой f, эти кривые далее кратко будут именоваться
page:126 *φ-кривыми.* Пока мы можем утверждать, что порядок этого семейства равен $2p-2$, а размерность $\geq p-1$. Позже мы докажем, что ее размерность в точности равна $p-1$ (см. след. №).

Якобиево *полное семейство* семейства, порожденного на кривой f произвольными прямыми плоскости, вырезается на кривой всевозможными сопряженными кривыми порядка $m-1$ (см. № 36) поэтому сопряженные кривые $(m-3)$-го порядка, если таковые вообще существуют, должны быть разностью (см. № 25) между названным Якобиевым семейством и удвоенными семейством, вырезанным названными прямыми. В силу доказанной в № 36 теоремы эта разность равна разности между Якобиевым семейством любого другого семейства и самим этим семейством, взятым два раза ($|A_j| - 2|A| = |B_j| - 2|B|$); отсюда:

Каноническое семейство $|K|$ кривой рано разности между Якоби*евым семейство произвольного линейного семейства, вырезанного на этой кривой, и самого этого семейства, взятого дважды:*

$$|K| = |A_j| - 2|A|.$$

Отсюда следует, что каноническое семейство остается инвариантным при бирациональных преобразованиях кривой f; позже мы придем к этому еще и другим путем (стр. 144).

n:44 **45. Специальные и неспециальные семейства. Теорема о редукции. Теорема** Римана-Роха**.** Теперь мы можем разделить линейные семейства на кривой f порядка m на два класса. Линейное семейство называется *специальным*, если оно может быть вырезано при помощи линейной системы сопряженных кривых порядка $(m-3)$ или еще меньшего; в противном случае семейство называют *неспециальным.* Специальное семейство может быть определено как семейство, которое (целиком или частично) содержится в каноническом семействе. Из инвариантности канонического семейства сразу следует, что указанное разделение семейств на два класса тоже имеет инвариантный характер, то есть что *специальное семейство при любом бирациональном преобразовании кривой, на которой задано это семейство, переходит опять в специальное семейство, а неспециальное семейство – в неспециальное.*

Заметим еще, что порядок специального семейства не может превысить $2p-2$ (обратное не верно); семейство же, порядок которого больше $2p-2$, заведомо не является специальным.

page:127 Докажем теперь *теорему о редукции* (Noether[76]):

Пусть g_n^r – специальное полное семейство на кривой f, а P – точка кривой, которая не лежит на всех φ-кривых, проходящих через некоторую группу G заданного семейства, тогда точка P является неподвижной точкой для групп полного семейства $|G+P|$.

Для доказательства проведем через точку P произвольную прямую a и обозначим как A группу, составленную из $m-1$ прочих точек пересечения этой прямой с кривой f. По предположению имеется хотя бы одна φ-кривая, проходящая через G, но не через точку P. Группу точек, которую вырезает эта кривая на f вне кратных точек, можно обозначить как $G+H$. Поскольку эта φ-кривая вмести с прямой a образует сопряженную кривую $(m-2)$-го порядка, проходящую через группу $P+G+H+A$, полное семейство $|G+P|$ вырезается всеми сопряженными кривыми порядка $m-2$, проходящими через группу $H+A$. Но с другой стороны эти кривые $(m-2)$-го порядка пересекают прямую a в $m-1$ точках (именно, в точках группы A) и поэтому содержат эту прямую целиком; отсюда следует, что точка P является неподвижной для семейства $|G+P|$.

Заметим еще, что предположения теоремы о редукции окажутся выполненными, если точка P выбрана произвольным образом.

Число линейно независимых φ-кривых, проходящих через группу G точек на кривой f, называется *индексом специализации* (indice di specialita) семейства $|G|$; мы будем обозначать его буквой i. Другими словами, под индексом специализации i семейства мы понимаем число линейно независимых канонических групп, содержащих группу G (поэтому вычет заданной группы g_n^r относительно канонического семейства имеет размерность $i-1$). Если индекс специализации семейства равен нулю, то это семейство

[76] Jonrn. f. Math. **97**, 224 (1884); Math. Ann. **37**, 424 (1890); vgl. jedoch auch Brill und Noether, Math. Ann. **7**, 279 (1873).

– неспециальное. семейства равен нулю. Справедлива след. теорема:

Теорема Римана-Роха.[77] *Полное линейное семейство порядка n на кривой рода p имеет размерность*

$$r = n - p + i,$$

где i – индекс специализации этого семейства.

Докажем эту теорему сначала для $i = 0$, то есть для неспециальных семейств. Вспомним, что для произвольного полного семейства уже было установлено неравенство $r \geq n - p$ (см. № 44), поэтому нам теперь достаточно доказать, что при $r > n - p$ семейство g_n^r неизбежно является специальным, то есть что через ее группу проходит некоторая φ-кривая.

Если $r = 0$, то есть $n \leq p - 1$, то справедливость высказанного утвер-
page:128 ждения не вызывает сомнения: размерность канонического семейства как минимум равна $p - 1$ и поэтому можно n точек канонической группы выбрать произвольным образом.

Теперь можно вести доказательство по индукции: пусть утверждение справедливо для семейств типа g_{n-1}^{r-1} при $r - 1 > n - 1 - p$, докажем его для семейства g_n^r. С этой целью рассмотрим вычет g_{n-1}^{r-1} заданного семейства g_n^r относительно точки P, которая не является неподвижной точкой для g_n^r. Поскольку по предположению $r > n - p$, то верно и $r - 1 > n - 1 - p$; следовательно, g_{n-1}^{r-1} является специальным семейством. Но все φ-кривые, проходящие через одну группу семейства g_{n-1}^{r-1}, должны также проходить и через точку P (то есть через группу семейства g_n^r), поскольку в противном случае семейство g_n^r по теореме о редукции имело бы точку P неподвижной. Поэтому имеется φ-кривая, проходящая через группу g_n^r, то есть g_n^r – специальное семейство.

Обратимся теперь к случаю $i > 0$ (специальное семейство). Поскольку размерность вычета группы G заданного семейства g_n^r относительно канонического семейства равна $i - 1$, то через $i - 1$, *но не через i произвольным*

[77] B. Riemann, Ges. math. Werke, 1. Aufl. (Leipzig 1857), Стр. 101, 109, 111; G. Roch, Journal f. Math. **64**, 372 и сл. (1864).

образом выбранных точек кривой f проходит *одна* φ-кривая, содержащая точки группы G.

Если $i = 1$, то, следовательно, полное семейство $|G+P|$ (здесь под P понимается произвольным образом выбранная точка кривой f) не может быть специальным семейством; поскольку это семейство в силу теоремы о редукции имеет неподвижную точку P, то его размерность $(n+1-p)$ равна размерности семейства $|G| = g_n^r$, то есть верно $r = n-p+1$.

Применим теперь индукцию по индексу специализации: пусть утверждение верно для семейств с индексом специализации, равным $i-1$, покажем, что оно верно и для семейств с индексом специализации, равным i. Если P – произвольным образом выбранная точка кривой f, а G – группа семейства g_n^r с индексом специализации i, то семейство $|G+P|$ имеет индекс специализации, равный $i-1$, и поэтому ее размерность дается формулой $(n+1)-p+(i-1)$. С другой стороны, по теореме о редукции P – неподвижная точка этого семейства, следовательно, размерность семейства $g_n^r = |G|$ равна размерности семейства $|G+P|$, то есть верно

$$r = (n+1) - p + (i-1) = n - p + i,$$

тем самым теорема полностью доказана.[78]

Первое следствие теоремы Римана-Роха: *каноническое семейство имеет размерность* $p-1$, поскольку для него $n = 2p-2$ и $i = 1$. *Поэтому каноническое семейство является семейством типа* g_{2p-2}^{p-1}.

page:129

Легко доказать, что *каноническое семейство является одним единственным семейством порядка* $2p-2$ *и размерности* $p-1$ *на заданной кривой рода* p. В самом деле, семейство g_{2p-2}^{p-1}, для которого размерность больше разности между его порядком и родом кривой f, является специальным и поэтому оно содержится в каноническом семействе, а, следова-

[78] Неравенство $r \geq n-p$, как и соотношение $r = n-p$ для неспециального случая восходит к Риману. Его метод, опирающийся на применение соответствующих кривой f Абелевых интегралов, позволял вычислить и размерность специальных семейств ($i > 0$) (см. №. **??**). Это заметил Рох в ук. соч., и поэтому эта теорема была названа Брилем и Нетерем теоремой Римана-Роха. Предложенное выше доказательство восходит к Нетеру. – Автор.

тельно, совпадает с ним. Отсюда очевидно, что *каноническое семейство не обладает неподвижными точками.* Если бы каноническое семейство имело неподвижную точку P, то, исключив ее из рассмотрения, мы бы получили семейство g_{2p-3}^{p-1}; добавляя к точкам этого последнего точку Q, отличную от точки P, мы бы получили семейство g_{2p-2}^{p-1}, отличное от канонического, что невозможно.

К сказанному можно добавить *новое доказательство инвариантности рода относительно бирациональных преобразований кривой.* Род p можно ввести как нижнюю границу разности между порядком n и размерностью r линейного семейства g_n^r, достигаемую на полных неспециальных семействах; такое определение несет очевидно инвариантный характер. Из инвариантности рода p сразу следует, что и *каноническое семейство*, будучи одним единственным полным семейством типа g_{2p-2}^{p-1} на f, *инвариантно относительно бирациональных преобразований кривой.* Все это ранее в конце № 44 было иным способом.

Добавим еще несколько замечаний.

a) Соотношение Римана-Роха $r = n - p + i$, или $i = p - (n - r)$, или, наконец, $i - 1 = p - 1 - (n - r)$ означает, что *требование прохождения через группу полного семейства g_n^r налагает на каноническую группу в точности $n-r$ условий.* Конечно, это утверждение имеет наглядный смысл только для специального семейства $(n - r < p)$.

b) Установив теорему Римана-Роха позволяет внести уточнения в № 44: неравенство (39) является на самом деле равенством, а неравенство (40) является равенством при $l \geq m - 3$. Это можно сформулировать в виде след. теоремы: *кратные точки кривой f порядка m налагают на сопряженную кривую порядка $l \geq m - 3$ независимые условия.* До сего момента мы знали лишь, что это утверждение верно для достаточно больших значений l (лемма из № 40).

c) Без труда устанавливается и след. *обращение теоремы о редукции.* Пусть $g_n^r + P$ – полное семейство с постоянной точкой P. Тогда вычет g_n^r

заданного семейства относительно P – полное семейство и, коль скоро по page:130 Nr. 44 $r \geq (n+1)-p$, это семейство g_n^r должно быть специальным, поскольку $r > n-p$. Если все φ-кривые, проходящие через группу семейства g_n^r, содержат точку P, то семейство g_n^r+P тоже является специальным, а условие прохождения через группы обоих семейств налагают на каноническую группу одно и то же число условий, что невозможно в силу замечания а). Итого:

Если полное семейство $g_n^r + P$ имеет неподвижную точку P, то семейство g_n^r является специальным и не все φ-кривые, проходящие через группу этого последнего, проходят через точку P. Поэтому, для того, чтобы полное семейство g_n^r+P имело неподвижную точку P, необходимо и достаточно, что семейство g_n^r было специальным, но не все φ-кривые, проходящие через его группу, содержали бы через точку P.

n:45 **46. Составное каноническое семейство. Эллиптические и гиперэллиптические кривые. Теорема** Клифорда. Может ли каноническое семейство кривой f быть составленным из инволюции γ_μ^1? Другими словами, может ли случиться так, что все канонические группы, проходящие через произвольным образом выбранную точку кривой f, необходимо проходят еще через другие $\mu - 1$ точку, положение которых меняется при движении выбранной точки?

Рассмотрим сначала общий вопрос: что получится, если g_n^r составлена из γ_μ^1. Представим группы γ_μ^1 как точки алгебраической кривой Γ, тогда семейству g_n^r отвечает семейство $g_{n/\mu}^r$ на Γ, и поэтому должно быть $\frac{n}{\mu} \geq r$; здесь равенство имеется только тогда, когда кривая Γ рациональная (см. № 34), то есть когда γ_μ^1 является линейным семейством g_μ^1 (см. №. 21).

Пусть теперь $n = 2r$, что в частности верно для канонического семейства. Коль скоро $\frac{n}{\mu} \geq r$, то $\frac{n}{\mu} \geq \frac{n}{2}$ и, следовательно, может быть или $\mu = 1$, или $\mu = 2$. Стало быть, нас интересует случай $\mu = 2$, когда $\frac{n}{\mu} = r$, то есть γ_2^1 должна быть линейным семейством g_2^1. Итого:

Линейное семейство типа g_{2r}^r на кривой f (в т.ч. и каноническое се-

мейство) может быть составленным только из линейного семейства g_2^1.

И наоборот, если на кривой f рода $p > 1$ имеется семейство g_2^1, то оно неизбежно является специальным ($r > n - p$), и поэтому условие прохождения через ее группы налагают на канонические группы $2 - 1 = 1$ условий (см. № 45, Замечание a), то есть все канонические группы, проходящие через произвольным образом выбранную точку f, необходимо проходят через сопряженные с ней точки в пучке g_2^1. Итого:

page:131 *Для того, чтобы каноническое семейство кривой f рода $p > 1$ было составным, необходимо и достаточно, чтобы на кривой f существовал пучок g_2^1.*

Если $p > 1$ и на кривой f существует семейство g_2^1, то это семейство является единственным семейством такого порядка и размерности, поскольку каноническое семейство $g_{2p_2}^{p-1}$ не может быть составлено из нескольких различных семейств типа g_2^1. Отсюда:

Кривая f, на которой существуют несколько различных семейств типа g_2^1, должна иметь род $p = 0$ или $p = 1$.

Если $p = 0$, то есть *если кривая рациональная, то имеется ∞^2 семейств типа g_2^1*; все они содержаться в семействе g_2^2, образованном всевозможными парами точек кривой.

Если $p = 1$, то имеется ∞^1 семейств g_2^1. Именно, на кривой f рода 1 любое линейное семейство g_n^r ($n > 0$) неспециальное, так как $2p - 2 = 0$ и, следовательно, всегда $n > 2p - 2$; следовательно, пара точек кривой f определяет полное семейство типа g_2^1. Зафиксируем точку A на кривой f, а точку B оставим подвижной, тогда подвижное семейство $|A + B|$ при ее движении пробегает множество всех семейств вида g_2^1 кривой f. Поэтому между семействами g_2^1 и положениями точки B имеется взаимно однозначное соответствие.

Кривые рода 1 называют *эллиптическими*; кривые рода > 1, на которых имеется *одно* семейство типа g_2^1, называют *гиперэллиптическими.* Кривые рода 2 являются всегда гиперэллиптическими, поскольку их каноническое семейство как раз имеет тип g_2^1. При этом:

На всех кривых, за исключением гиперэллиптических, каноническое семейство является простым.

Докажем еще след.

Теорема Клифорда[79]: *Если g_n^r – специальное семейство, то верно неравенство $n \geq 2r$.*

Пусть H – остаток полного семейства g_n^r относительно канонического семейства; требование прохождения через группу семейства g_n^r налагает на каноническую группу, проходящую через H, ровно r условий, а на произвольную каноническую группу – $n - r$ условий (см. №. 45, Замечание а). Число условий, налагаемых на группу канонического семейства, не может возрасти при переходе к его подсемейству, поэтому $n - r \geq r$, то есть
page:132 $n \geq 2r$.

Замечание. Очевидно, что теорема остается справедливой, если g_n^r – подсемейство, *но равенство возможно лишь тогда, когда g_n^r – полное семейство.* В самом деле, если g_n^r содержится в некотором семействе $g_n^{r'}$, то $r' > r$, откуда $n \geq 2r' > 2r$. Мы скоро выясним, в каких случаях имеет место знак равенства, см. № 48.

n:46 **47. Канонические кривые рода p.** Поскольку для кривой f рода $p > 1$, не являющейся гиперэллиптической, каноническое семейство является простым семейством типа g_{2p-2}^{p-1} без неподвижных точек (см. № 45 и 46), поэтому в пространстве размерности $p - 1$ можно построить кривую C порядка $2p - 2$, бирационально эквивалентную f, на которой каноническое семейство вырезается гиперплоскостями. Очевидно и обратное: на кривой C рода p и порядка $2p - 2$, лежащей в пространстве S_{p-1}, семейство гиперплоскостей вырезает каноническое семейство. По этой причине мы хотим далее кривую C *канонической.*

Если пространство S_{p-1}, в котором мы хотим построить кривую C, за-

[79] Clifford. Phil. Trans. **169**, 681 (1876); и Papers, стр. 331.

фиксировано, то остается еще произвол в выборе проективного соответствия между группами канонического семейства и гиперплоскостей пространства S_{p-1} (см. № 27), поэтому в S_{p-1} содержится бесконечно много кривых, бирационально эквивалентных кривой f. На самом деле *бирациональное соответствие между двумя каноническими кривыми является коллиниацией* (см. № 16). В самом деле, поскольку каноническое семейство инвариантно относительно бирациональных преобразований, соответствие между обеими этими кривыми должно быть таким, что семейство гиперплоских сечений одной кривой отвечает семейству гиперплоских сечений другой, то есть должно быть коллинеацией (s. Nr. 32).

После того, как выбрано пространство S_{p-1}, в котором желают построить каноническую кривую C, бирационально эквивалентную кривой f, эта кривая C определена с точностью до коллинеарный пространства, поэтому вместо *некоторой* канонической кривой мы чаще будем говорить о *канонической кривой*, бирационально эквивалентной кривой f.

Каноническая кривая является нормальной кривой, то есть ее нельзя получить как проекцию другой кривой того же порядка, принадлежащей пространству S_p (см. № 33).

Обратимся теперь к вопросу о том, чем представляется группа специаль-
page:133 ного семейства на канонической кривой C. Если G_n – группа из n точек на кривой C, задающая специальное семейство, то условие прохождение через G_n налагает на канонические группы, то есть гиперплоскости пространства S_{p-1}, в точности $n-r$ условий; следовательно, через G_n проходит линейная система гиперплоскостей размерности $p-1-n+r$, или, другими словами, группа G_n принадлежит пространству S_{n-r-1}, общему всем этим гиперплоскостям. Если же наоборот, группа G_n принадлежит некоторому пространству размерности $n-r-1$, то индекс специализации этой группы равен $p-n+r$, и поэтому семейство $|G_n|$ имеет размерность r. Итого:

Группы специального полного семейства g_n^r вырезаются на канонической кривой C линейными пространствами размерности $n-r-1$.

n:47 **48. Дополнение к теореме** Клифорда. Легко выяснить, в каких случаях оценка, установленная в теореме Клифорда (№ 46)обращается в равенство. Если для специального семейства g_n^r на кривой C верно $n = 2r$ (при этом конечно предполагается, что g_n^r – полное семейство), то все гиперплоскости, проходящие через $r = n - r$ произвольным образом выбранных точек кривой C, необходимо проходит через r других точек, дополняющих эти r произвольных точек в заданных ими группе g_n^r.

Пространство S_{r-1}, заданное r произвольным образом выбранными точками, должно, следовательно, пересекать кривую C в r других точках. При $r < p-1$ это невозможно [80]. С другой стороны r будучи размерностью специального семейства не может быть и больше $p-1$; следовательно, $r = p-1$ и $n = 2p - 2$, то есть исходное семейство на самом деле совпадает с каноническим. Отсюда:

Для неканонического специального семейства g_n^r на негиперэллиптической кривой верно неравенство $n > 2r$.

Необходимость исключения гиперэллиптических кривых обусловлена тем, что по ходу доказательства нам пришлось построить каноническую кривую C. Так и должно быть, поскольку *на гиперэллиптической кривой для любого специального полного семейства, составленного из g_2^1 и не имеющего неподвижных точек, справедливо соотношение $n = 2r$.*

Чтобы убедиться в этом, нужно рассмотреть семейство g_r^r $(r \leq p-1)$, лежащее на рациональной кривой Γ, представляющей образ семейства g_2^1, и показать, что отвечающее g_r^r на заданной гиперэллиптической кривой f
page:134 специальное семейство g_{2r}^r является полным (см. № 46).

Имеется одно весьма примечательное дополнения к теореме Клифорда:

Канонические кривые не имеют кратных точек.

В самом деле, если точка P канонической кривой C пространства S_{p-1} имеет кратность s, то полное семейство, которое вырезается на кривой C

[80]См. прим. на стр. 98 к № 30.

гиперплоскостями, проходящими через точку P, является неканоническим специальным семейством типа g_{2p-2-s}^{p-2}, поэтому согласно дополнению к теореме КЛИФОРДА должно быть верно $2p-2-s > 2(p-2)$, то есть $s < 2$, откуда $s = 1$.

n:48 **49. Бирациональное преобразование плоской кривой в многомерную кривую без кратных точек или в плоскую кривую, имеющую только обычные узлы.** Если плоская кривая не является гиперэллиптической и $p > 1$, то бирациональным преобразованием ее можно перевести в кривую без кратных точек – каноническую кривую. Но в любом случае можно указать такое преобразование, годное даже для гиперэллиптических кривых:

На любой алгебраической кривой f рода p неспециальное полное семейство g_n^r порядка $n > 2p$ является простым и не имеет неподвижных точек; при его помощи кривую f можно преобразовать бирационально в лишенную кратных точек нормальную кривую C порядка n.

Напомним, что если семейство g_n^r составлено из инволюции γ_μ^1, должно выполняться неравенство $n \geq r\mu$ (см. начало № 46). Если полное семейство g_n^r является неспециальным, то $r = n - p$ и поэтому $n \geq (n-p)\mu$; но тогда $\mu \geq 2$ влечет $n \geq 2(n-p)$ или $2p \geq n$. Отсюда срезу следует, что при $n > 2p$ семейство неизбежно должно быть простым. Остается показать, что оно не имеет неподвижных точек. С этой целью предположим противное: пусть g_n^r имеет i неподвижных точек. Поскольку $n > 2p$, то есть $n < 2(n-p)$ или также $n < 2r$, то тем более должно быть верно $n - i < 2r$. По теореме КЛИФОРДА полное семейство g_{n-i}^r, которое получится, если исключить из групп исходного семейства неподвижные точки, не является специальным. Но отсюда выходит, что $n - i - p = r$, откуда $i = 0$.

Доказав это, можно преобразовать бирационально кривую f в кривую C порядка n, лежащую в пространстве S_r, на которой семейство, отвечающее заданному семейству g_n^r, вырезается гиперплоскостями. Остается еще доказать, что *нормальная кривая C рода p, принадлежащая пространству* page:135 *S_r и имеющая порядок $n > 2p$, не может иметь кратных точек.*

Допустим противное: пусть P – s-кратная точка кривой C $(s \geq 2)$, тогда гиперплоскости, проходящие через точку P, вырезают на кривой C полное семейство g_{n-s}^{r-1}. Поскольку $n > 2p$, то, как мы только что видели, верно и $n < 2r$, и тем более $n - s < 2(r-1)$; по теореме Клифорда отсюда получается, что семейство g_{n-s}^{r-1} не является специальным. Но тогда $r - 1 = n - s - p$, что совместимо с $r = n - p$ лишь тогда, когда $s = 1$, что противоречит предположению.

Спроектировав кривую C из пространства S_i, не пересекающего трехмерное многообразие, заметаемое хордами кривой $(i \leq r-4)$, на пространство S_{r-i-1}, получим кривую, хоть уже и не нормальную, но все еще не имеющую кратных точек и бирационально эквивалентную заданной кривой. В частности, взяв $i = r - 4$, *можно заданную кривую преобразовать бирационально в лишенную кратных точек кривую в пространстве трех измерений.*

Пусть Γ – эта свободная от кратных точек пространственная кривая. Возьмем в пространстве S_3 точку O, не лежащую ни на разворачивающейся поверхности, заметаемой касательными к кривой, ни на линейчатной поверхности, заметаемой все секущими, пересекающими кривую три раза[81], тогда из O пройдет лишь *конечное число* h хорд кривой Γ, прочем каждый из них пересекает кривую в друх различных точках. Проекция кривой Γ из точки O на произвольным образом выбранную плоскость имеет, следовательно, ровно h обыкновенных двойных точек (узлов) и никаких других кратных точек.

Таким образом, *заданную кривую можно бирационально преобразовать в плоскою кривую, имеющую в качестве особых точек только обыкновенные двойные точки.*[82]

---

[81]См. прим. на стр. 98 к № 30.

[82]Этот результат, содержащийся в неявном виду уже в свойстве линейных системy, полученном Бриллем и Нетером, в явном виде был отмечен в след. статьях: L. Kronecker, Jonrn. f. Math. **91**, 301 (1881) и Veronese, Math. Ann. **19**, 214 (1881). Доказательство, основанное на плоских преобразованиях кривой типа (1,2), было дано Bertini в Rivista di matematica **1**, 22 (1891) и Math. Ann. **44**, 158, (1894).

Пусть f – плоская кривая рода p, имеющая какие угодно особые точки. Можно рассмотреть линейную систему сопряженных кривых столь большого порядка l, чтобы на f вне кратных точек эти кривые вырезали бы неспециальное семейство g_n^r, порядок которого $n > 2p$, и которое содержит частично семейство пересечений f с прямыми. Можно далее внутри

page:136

системы всех сопряженных кривых l-го порядка выделить систему Σ размерности r, не содержащую кривых, распадающихся на f и еще другую кривую, таким образом, чтобы каждая группа семейства g_n^r вырезалась одной единственной кривой системы Σ. Пусть уравнение этой системы имеет вид

$$\lambda_0\varphi_0(x_0, x_1, x_2) + \cdots + \lambda_r\varphi_r(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Тогда кривая C представляется равенствами

$$\rho y_i = \varphi_i(x_0, x_1, x_2), \quad (i = 0, \dots r)$$
$$f(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Здесь $(y_0, y_1, \dots, y_r)$ означают однородные координаты подвижной точки пространства S_r, в котором находится плоскость π кривой f. По предыдущему эта кривая C бирационально эквивалентна кривой f и не имеет кратных точек. Мы утверждаем еще, что f может быть получена как проекция кривой C.

Чтобы доказать это, рассмотрим сопряженную кривую $(l-1)$-го порядка, скажем, $\psi(x_0, x_1, x_2) = 0$, не содержащую f в качестве своей компоненты. Положим

$$\varphi_0 \equiv \psi x_0,\ \varphi_1 \equiv \psi x_1,\ \varphi_2 = \psi x_2,$$

и, кроме того, примем точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ плоскости π за основные точки $(y_0 = 1, y_1 = y_2 = \cdots = y_r = 0)$, $(y_1 = 1, y_0 = y_2 = \cdots = y_r = 0)$, $(y_2 = 1, y_0 = y_1 = y_3 = \cdots = y_r = 0)$ системы координат в S_r. Кривая C

– Автор.

будет тогда представляться равенствами

$$\rho y_0 = \psi x_0,\ \rho y_1 = \psi x_1,\ \rho y_2 = \psi x_2,$$
$$\rho y_i = \varphi_i, \quad (i = 3, 4, \dots r)$$
$$f(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

то есть координаты y_0, y_1, y_2 подвижной точки кривой C пропорциональны координатам x_0, x_1, x_2 подвижной точки кривой f и поэтому удовлетворяют уравнению $f(y_0, y_1, y_2) = 0$. Отсюда следует, что проекция кривой C их пространства S_{r-3} $(y_0 = y_1 = y_2 = 0)$ на плоскость π $(y_3 = y_4 = \cdots = y_r = 0)$ совпадает с кривой f. Итого:

Плоскую алгебраическую кривую, наделенную каким угодно особыми точками, всегда можно рассматривать как проекцию алгебраической кривой, лишенной особых точек.[83]

Каждая особенность плоской кривой получается при этом проектирова-
page:137 нием.

n:49 **50. Род кривой по** Вейерштрассу**. Теорема о пробелах.** Из теоремы Римана-Роха следует, что группа из p произвольным образом выбранных точек кривой f рода p задает полное семейство типа g_p^0, поскольку индекс специализации i равен нулю (ведь $p-1$ – это размерность канонического семейства). Группа $p+1$ произвольным образом выбранных точек задает (неспециальное) полное семейство g_{p+1}^1 без неподвижных точек. Это семейство можно рассматривать как семейство группы постоянного уровня некоторой рациональной функции подвижной точки кривой f (см. №. 21). Отсюда:

На кривой рода p наименьший порядок рациональной функции, полюса которой выбраны произвольным образом, равен $p+1$.

Рассмотрение этого минимального порядка Вейерштрасс и положил в основу своей теореии алгебарических функций одной переменной[84]. Число p, которое Риман назвал *родом* (Geschlecht), Вейерштрасс называет

[83] См. Veronese, Math. Ann. **19**, 163 и сл. (1881).
[84] K. Weierstrass, Math. Werke IV, 69 (Berlin 1903).

рангом (Rang) алгебраического образа f. Рассмотрение порядков рациональных функций на алгебраической кривой f (то есть линейных семейств, не имеющих неподвижных точек), починено другой теоремы, за которую мы тоже должны быть признательны Вейерштрассу, и которую этот великий математик назвал *теоремой о пробелах* (Lücken-satzes). Мы подойдем к этой теореме, как и к некоторым ее обобщениям, следуя Нетеру.[85]

Рассмотрим на нашей кривой f любые n точек $P_1, P_2, \dots, P_n$, составляющие неспециальную группу, и обозначим как G_i группу вида $(P_1, P_2, \dots, P_i)$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

Начнем с того, что выберем среди заданных столь много точек $P_1, P_2, \dots P_{\mu+1}$, чтобы полное семейство $|G_{m+1}|$ имело размерность 1 и не имело неподвижных точек. Семейства $|G_i|$ при $i = 1, 2, \dots, \mu$ имеют, стало быть, размерность 0, и по теореме Римана-Роха (см. № 45, Замечание а)) условие прохождения канонической группы через точки $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ должно накладывать на них μ отличных друг от друга условий, причем все эти группы будут содержать точку $P_{\mu+1}$ [поскольку иначе эта точка будет неподвижной в силу теоремы о редукции].

Предположим далее, что канонические группы, проходящие через группу $G_{\mu+1}$, содержат также точки $P_{\mu+2}, P_{\mu+3}, \dots, P_{\mu_1-1}$. Тогда канонические page:138 группы, которые должны проходит через G_{μ_1-1}, подчинены всего μ условиям. Поэтому полные семейства $|G_i|$ при $i = \mu+2, \mu+3, \dots, \mu_1 - 1$ должны иметь размерность $i - \mu$. Мы утверждаем, что ни одно из этих семейств не имеем неподвижных точек. Начнем с того, что неподвижная точка группы $|G_i|$ не может лежать в группе G_μ, поскольку в этом случае семейство $|G_{\mu+1}|$, содержащееся в $|G_i|$, имело бы неподвижную точку. Случай, когда среди точек $P_{\mu+1}, P_{\mu+2}, \dots, P_{\mu_1-1}$ имеются неподвижные, также следует исключить, поскольку тогда, исключив эти точки из рассмотрения, мы бы получили семейство размерности $i - \mu$ и порядка $< i$ и требование прохождения через группу этого семейства накладывало бы на канонические

[85] Journ. f. Math. **97**, 224 и сл. (1884).

группы менее чем μ условий, что невозможно, поскольку среди этих групп имеется и такая, которая содержит G_μ.

Пусть P_{μ_1} – *первая* точка ряда, через которую не проходят все канонические группы, проходящие через G_μ. Тогда условие прохождение через группу G_{μ_1}, то есть группу G_μ (μ условий) и точку P_{μ_1}, должно накладывать на канонические группы $\mu+1$ различных условий. Коль скоро в этом случае имеется каноническая группа, проходящая через группу G_{μ_1-1}, но не через точку P_{μ_1}, то в силу теоремы о редукции точка P_{μ_1} является неподвижной для семейства $|G_{\mu_1}|$.

Предположим, что все канонические группы, проходящие через G_{μ_1}, неизбежно проходят и через точку $P_{\mu_1+1}, P_{\mu_1+2}, \ldots, P_{\mu_2-1}$. Тогда как и выше доказывается, что семейства $|G_i|$ при $i = \mu_1+1, \ldots, \mu_2-1$ не имеют неподвижных точек.

Пусть далее P_{μ_2} – первая точка ряда, через которую не проходят все канонические группы, проходящие через G_{μ_1}. Эта точка является неподвижной точкой для семейства $|G_{\mu_2}|$ и при этом условие прохождение через группу G_{μ_2} накладывает на канонические группы $\mu+2$ условий.

Описанное построение приводит нас к башне

$$G_\mu \subset G_{\mu_1} \subset G_{\mu_2} \subset \cdots \subset G_{\mu_l},$$

причем условие прохождения через ее группы накладывает на канонические группы $\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots, \mu+l$ условий (и поэтому каждая из этих групп задает семейство с одной неподвижной точкой), а сам процесс построения башни обрывается на группе G_{μ_l}, принадлежащей *одной единственной* канонической группе, то есть когда число $\mu+l$ (число условий, которые налагает группа G_{μ_l} на канонические группы) равно $p-1$. Обозначим как $P_{\mu_l+1}, \ldots, P_{\mu_{l+1}-1}$ следующие точки ряда, через которые проходит каноническая группа, проходящая через группу G_{μ_l}, а как $P_{\mu_{l+1}}, \ldots, P_n$ – оставшиеся точки ряда. Тогда семейства $|G_i|$ при $i = \mu_l+1, \ldots, \mu_{l+1}-1$ не имеют неподвижных точек, а семейство $|G_{\mu_{l+1}}|$ обладает неподвижной точкой $P_{\mu_{l+1}}$ и не является *специальъным*. Отсюда следует, что также и се-

мейства $|G_i|$ $(i = \mu_{l+1} + 1, \ldots, n)$ не являются специальными и не имеют
page:139 неподвижных точек.

В итоге мы видим, что те группы G_i, которые задают полные семейства с неподвижными точками, отвечают следующим p значениям i:

$$1, 2, \ldots, \mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l, \mu_{l+1}.$$

Итого:

Пусть подвижная точка пробегает кривую f рода p, тогда среди рациональных функций этой точки, группы полюсов которых совпадают с группами G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, не существуют лишь те, которые отвечают некоторым p значениям i.

Вейерштрассова *Теорема о пробелах* получается отсюда, когда m сливаются в одну точку:

Среди рациональных функций, обращающихся в бесконечность лишь в одной точке i, отсутствуют лишь те, которые имеют в этой точке полюс, порядок i которого принимает одно из p значений.

Легко видеть, что точка P, для которой существует рациональная функций порядка $i \le p$ с i-кратным полюсом в точке P, для канонического семейства является как минимум точкой кратности p. Именно, в этом случае существует семейство g_p^1, в котором точка P имеет кратность p, и следовательно условие прохождения через нее с кратностью p налагает на канонические группы $p-1$ условий (или и того менее, если семейство g_p^1 не является полным); отсюда следует, что точка P для некоторой канонической группы должна быть p-кратной.

Имеется лишь конечное число p-кратных точек канонического семейства, их называют ВЕЙЕРШТРАССОВЫМИ точками [86], поэтому верно след.:

[86]Если кривая не является гиперэллиптической, то есть если можно представить ее при помощи канонической кривой в пространстве S_{p-1}, то это получается из того соображения, что произвольным образом выбранная оскулирующая гиперплоскость к кривой может иметь только $(p-1)$-точечное касание. (Это – дифференциальное свойство, которое легко доказать и для необязательно алгебраических кривых, так, напр., произвольным образом выбранная точка не может быть точкой возврата и т.д.). Если кривая – гиперэллиптическая, то ВЕЙЕРШТРАССОВЫ точки – двойные точки g_2^1. Помимо упомя-

В произвольной точке P кривой последовательность пропускаемых порядков образована первыми p натуральными числами; отклонение от этого правила происходит лишь тогда, когда P – ВЕЙЕРТШТРАССОВА *точка.*

нутой работы НЕТЕРА см. относительно *теоремы о пробелах* еще след.: NOETHER, Journ. f. Math, **92**, 301 (1881); A. HURWITZ, Math. Ann. **41**, 409 (1893); H. F. BAKER, Abels Theorem and the allied Theory of Theta Functions. S. 32—46, Cambridge 1897; J. C. FIELDS, Theory of the algebraic Functions of a complex variable. Berlin 1906.

Список сокращений, используемых при цитировании журнальных статей

Acta Math.	Acta Mathematica.
Amer. J.	American Journal of Mathematics.
Ann. di Mat.	Annali di Matematica pura ed applicata.
Ann. éc. norm.	Annales scientifiques de l'école normale supérieure (Paris).
Berl. Sitzungsber. (Abh.)	Sitzungsberichte (Abhandlungen) der Kgl. preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin.
Bibl. Math.	Bibliotheca Mathematica.
Bologna Rend. (Mem.)	Rendiconti (Memorie) della Reale Accademia delle scienze di Bologna.
Bull. Soc. Math.	Bulletin de la Société Mathématique de France.
C. R.	Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris.
Giorn. di Mat.	Giornale di Matematiche di Battaglini (Napoli).
Ist. Lomb. Rend.	Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano).
Journ. de Math.	Journal de Mathématiques pures et appliquées.
Journ. éc. polyt.	Journal de l'école polytechnique.
Journ. f. Math.	Journal für die reine und angewandte Mathematik (gegründet von A. L. Crelle).
Lond. Proc. Math. Soc.	Proceedinge of the London Mathematical Society.
Math. Ann.	Mathematische Annalen.
Napoli Atti	Atti della Reale Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.

Padova Atti (Mem.)	Atti (Memorie) della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova.
Palermo Rend.	Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
Paris Sav. étr.	Académie des Sciences de Paris, Mémoires présentés par divers Savants.
Phil. Trans.	Philosophical Transactions of the Royal Society of London.
Quart. J.	The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics (London).
Rom. Acc. L. Rend. (Mem.)	Atti della R. Accademia dei Lincei. Rendiconti (Memorie) Roma.
Torino Atti (Mem.)	Atti (Memorie) della R. Accademia delle scienze di Torino.
Ven. Ist. Atti	Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.